La symplectification de la science

11

1992

par Mark J. Gotay
(Université de Hawaï, Honolulu)
et James A. Isenberg
(Université d'Eugene, Oregon)
Traduit de l'anglais par M. Audin.

Mark J. Gotay est professeur à l'université de Hawaï (USA). Il s'intéresse notamment au problème de la quantification en géométrie symplectique.

James A. Isenberg est professeur à l'université d'Eugene, Oregon (USA). Ses travaux portent sur les applications de la théorie des équations aux dérivées partielles et la géométrie différentielle à la physique mathématique, notamment aux équations d'Einstein.

La géométrie symplectique aux fondements de la physique et des mathématiques

La physique, c'est la géométrie. C'est un des principes directeurs de la physique moderne. Il vient surtout d'Albert Einstein, dont la contribution principale — via la relativité générale — a été de voir la gravitation comme un effet de la courbure de l'espace-temps. La vision d'Einstein est remarquable de simplicité, a un pouvoir conceptuel important. Aussi bien, elle mène à une théorie de la gravitation qui s'accorde à merveille avec les expériences et observations. Un autre triomphe du point de vue géométrique est le développement dans les quatre dernières décennies des théories de ‹jauge› des processus physiques fondamentaux. Aujourd'hui, la géométrie ne se manifeste plus seulement dans la gravitation mais aussi dans l'électro-magnétisme et les forces nucléaires. Le travail continue activement vers l'ultime ‹grande unification›, le mariage de *toutes* les interactions physiques entre elles aussi bien qu'avec la géométrie.

Published in: Gazette des Mathématiciens 54, 59--79 (1992).
Reprinted in: Ou en Sont Les Mathématiques (J.-M. Kantor, Ed.), Soc. Math. France & Éditions Vuibert, Paris, 235--254 (2002).

La géométrie de la relativité générale et des théories de jauge, connue sous le nom de *géométrie riemannienne* (d'après Riemann), est une généralisation courbe de l'ancienne et familière géométrie euclidienne. Mais il y a un autre type de géométrie, moins familière et moins intuitive, qui est encore plus profondément reliée à la physique, la *géométrie symplectique.*

C'est la mathématique qui sous-tend la mécanique et qui se trouve donc à la base de la physique classique. Le comportement de systèmes et de phénomènes aussi divers que le mouvement d'une toupie, le magnétisme, la propagation des ondes, et jusqu'au champ gravitationnel lui-même peut être décrit et compris dans une grande mesure en termes de cette géométrie.

Ainsi la physique est de la géométrie — *géométrie symplectique.* C'est vrai tant au niveau théorique qu'au niveau pratique. La géométrie symplectique devient un outil indispensable pour comprendre le comportement à grande échelle de systèmes complexes comme les super-anneaux de collision, ou le guidage de la sonde ‹Galileo› vers Jupiter. Une partie de la compréhension, qui peut se perdre quand on étudie les équations différentielles compliquées qui gouvernent le mouvement d'un tel corps, peut être retrouvée par la géométrie symplectique. Une telle compréhension peut être cruciale : elle aurait pu sauver ‹Explorer I›, un satellite de la fin des années 50 dont on a perdu le contrôle quand il s'est mis à tourner autour d'un axe dynamique instable.

En plus de son rôle important en physique, la géométrie symplectique joue un rôle de plus en plus important à l'intérieur des mathématiques : les idées symplectiques s'imposent un peu partout, mais en plus, il y a des indications que la plupart des mathématiques vont finalement être ‹symplectifiées›. Nous sommes peut-être témoins des prémisses d'une révolution symplectique dans la science fondamentale. Déjà, il est évident que la géométrie symplectique est l'une des productions (et un lien entre) mathématique et physique les plus importantes de ce siècle.

Boîte 1 : Un peu d'histoire

Ménechme prévenait Alexandre : ‹Il n'y a pas de voie royale vers la géométrie›. S'il n'y a pas de voie royale vers la géométrie symplectique, le chemin historique est certainement rempli de personnages royaux. En effet les racines de la géométrie symplectique se trouvent dans les travaux de beaucoup des plus célèbres mathématiciens et physiciens du dix-neuvième et du début du vingtième siècle : Lagrange, Poisson, Hamilton, Jacobi, Liouville, Hertz, Noether et Poincaré. En effet, ils ont fait des contributions durables à la science de la mécanique, source de la géométrie symplectique à laquelle elle est indissolublement liée. Comme c'est souvent le cas, les mathématiques doivent leur existence à la physique et c'est particulièrement vrai de la géométrie symplectique ; en retour, la physique a été enrichie par les techniques et idées des mathématiques qu'elle a engendrées.

Même si la géométrie symplectique était déjà là depuis le commencement, la nature géométrique de la mécanique était obscurcie par un accent précocement mis sur les aspects analytiques et calculatoires de la théorie. Cet état d'esprit était tellement prédominant que Lagrange, dans la préface à sa monumentale *Mécanique Analytique* [1788], pouvait affirmer :

‹On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme›.

C'est seulement plus d'un siècle plus tard, bien après le travail de renouvellement des bases de Riemann en 1854, que l'on trouve Darboux en 1889 et Hertz en 1899 employant des idées géométriques en mécanique, traitant le mouvement d'un système, aussi compliqué fût-il, comme celui d'une ‹particule› dans un certain espace courbe de grande dimension. L'arrêt de mort de l'ère analytique fut finalement rendu par Henri Poincaré en 1889, quand il réalisa que des techniques purement quantitatives ne pourraient suffire pour résoudre certains problèmes de mécanique céleste, notamment la stabilité du problème ‹à *n* corps› (par exemple le mouvement des planètes soumises à leurs attractions gravitationnelles mutuelles).

Cette impossibilité célèbre engendra la ‹période qualitative› en mécanique. Le premier théorème de géométrie symplectique en tant que telle, le ‹dernier théorème géométrique de Poincaré›, qui, en 1912, prédit entre autres choses l'existence d'orbites périodiques dans le problème à *n* corps. Toutefois, la géométrisation de la mécanique avança lentement et longtemps les aspects symplectiques restèrent dans l'ombre. Encore à la fin des années 40, certains physiciens utilisaient les idées symplectiques superficiellement et précautionneusement (une étude contemporaine se trouve dans *The Variational Principles of Mechanics* de Cornelius Lanczos (University of Toronto Press, 1949)).

En même temps, des mathématiciens redécouvraient la géométrie symplectique sous des angles complètement différents, avec les recherches de Sophus Lie, Poincaré et Elie Cartan marquant la voie. Mais la géométrie symplectique comme discipline mathématique distincte, n'apparut pas réellement avant les années 40 avec les travaux mal connus de Hwa-Chung Lee en Chine. En dix ans, on trouve des français comme Ehresmann, Lichnerowicz et Reeb posant les bases des développements futurs et des applications à la mécanique. Au milieu des années 60, la géométrie symplectique entrait dans le langage mathématique moderne et l'union symplectique de la géométrie et de la mécanique était définitivement accomplie. Une période de croissance exponentielle, alimentée surtout par des écoles américaines et russes de géomètres symplecticiens suivit et continue jusqu'à ce jour.

Une des raisons pour lesquelles la géométrie symplectique est relativement mal connue et a été si longue à se développer est son côté abstrus — et presque mystérieux. Pour la décrire, nous allons la comparer avec la géométrie euclidienne et sa généralisation riemannienne. L'essence de l'une comme de l'autre se trouve déjà dans l'exemple le plus simple, celui du plan $\mathbb{R}^2$.

Ainsi que sa racine grecque $\gamma\epsilon o \mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha\epsilon$ (‹mesure de la Terre›) l'indique, la géométrie a son origine dans l'art du relevé et de l'arpentage. C'est pourquoi elle donne tant d'importance aux mesures des longueurs et des angles. Toute cette information est codée mathématiquement dans la notion de base, la *métrique* g. C'est un objet qui associe un nombre à toute paire de vecteurs $v = (v_1,v_2)$ et $w = (w_1,w_2)$ du plan grâce à

$$g(v,w) = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Elle est *symétrique* ($g(v,w) = g(w,v)$) et *non dégénérée* ($g(v,w) = 0$ pour tout vecteur w si et seulement si $v = 0$). On définit ensuite la longueur d'un vecteur v par $||v|| = \sqrt{g(v,v)}$; d'où Pythagore

$$||v||^2 = (v_1)^2 + (v_2)^2.$$

De même l'angle θ des deux vecteurs v and w est donné par

$$\cos\theta = \frac{g(v,w)}{||v|| \cdot ||w||}.$$

En particulier, v fait un angle droit avec w si et seulement si $g(v,w) = 0$. La symétrie de g assure que l'angle de v et w est le même que celui de w et v, et la non dégénérescence garantit qu'aucun vecteur non nul n'est perpendiculaire à tous les vecteurs. La métrique contient donc beaucoup d'informations géométriques familières.

De même, la *forme symplectique standard* Ω sur $\mathbb{R}^2$ est un objet qui associe un nombre à deux vecteurs v et w ; dans ce cas la formule est :

$$\Omega(v,w) = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Il faut remarquer à la fois l'ordre et le très important signe : à cause d'eux, Ω est *anti*symétrique : $\Omega(w,v) = -\Omega(v,w)$. Ceci veut dire que, contrairement à la métrique euclidienne g, Ω ne donne lieu à aucune notion d'angle ou de longueur. En fait, la ‹longueur symplectique› $||v|| = \sqrt{\Omega(v,v)}$ d'un vecteur v est toujours nulle, et pire : tout vecteur est désormais perpendiculaire à lui-même !

Mais la forme symplectique fait quelque chose d'intéressant : elle précise le concept d'‹aire orientée›. Considérons le parallélogramme formé par les vecteurs v et w ; son aire est

$|\Omega(v,w)|$. Le signe de $\Omega(v,w)$ se détermine en comparant l'orientation de $[v,w]$ avec l'orientation usuelle du plan : c'est positif si elles coïncident, négatif sinon. Changer l'ordre des vecteurs renverse donc l'orientation et le signe, d'où l'antisymétrie. De même que la métrique g, la forme symplectique Ω est non dégénérée : les seuls parallélogrammes d'aire nulle sont plats (v et w colinéaires).

Ainsi la géométrie symplectique est purement une géométrie des aires(1). Nous verrons comment ceci va bien à la mécanique classique.

Les géométries symplectique et euclidienne du plan $\mathbb{R}^2$ sont déjà intéressantes et non-triviales. Mais en physique, en mathématiques, et aussi bien dans la vie ordinaire, tout ne se passe pas dans un plan, il est nécessaire de généraliser. Il y a deux façons de rendre la géométrie plus utile (et fascinante !) : ajouter des dimensions, ou autoriser des espaces plus compliqués (‹tordus›). Toutes deux sont indispensables : en fait l'univers physique (espace-temps) que nous habitons actuellement est un espace courbe de dimension 4. Discutons ces généralisations l'une après l'autre, à la fois pour les géométries euclidienne et symplectique.

Pour la géométrie euclidienne, la généralisation aux dimensions supérieures est directe. Il y a des droites et des angles entre elles dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de tous les jours aussi bien que dans les plus abstraits $\mathbb{R}^n$. On peut donc construire pour chacun de ces espaces une métrique qui calcule les longueurs et les angles.

L'extension en dimension plus grande est plus compliquée dans le cas symplectique, l'aire est un concept de dimension 2. En fait, on ne peut définir un concept d'aire orientée dans un espace de dimension impaire comme $\mathbb{R}^3$, sans introduire des phénomènes parasites (dégénérescences). D'autre part, on peut construire une forme symplectique sur $\mathbb{R}^4$ ainsi. On regarde $\mathbb{R}^4$ comme la somme $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ de deux plans ; alors l'aire orientée d'un parallélogramme de cet espace est la somme des aires orientées de ses ombres sur les deux plans. Cette approche fonctionne pour $\mathbb{R}^6$, $\mathbb{R}^8$, etc ; seuls les espaces de dimension *paire* ont des structures symplectiques (nous en verrons une raison physique).

Considérons maintenant l'autre généralisation nécessaire. L'histoire est familière dans le cas euclidien : au XIXème siècle, des géomètres comme Bolyai, Gauss et Lobatchevski se demandaient à quoi ressemblerait la géométrie si les ‹parallèles› ne restaient pas parallèles mais se mettaient à converger ou à diverger. Les triangles pourraient alors avoir des angles dont la somme soit plus, ou moins, que 180°, il pourrait exister des carrés hexagonaux (ou des hexagones dont tous les angles sont droits) et toutes les formules usuelles de la géométrie euclidienne seraient remplacées par des formules nouvelles et exotiques.

) Cette discussion pourrait laisser croire que la forme symplectique n'est autre que le produit vectoriel. C'est une coïncidence dans $\mathbb{R}^2$; en dimension supérieure, il n'y a pas de relation entre les deux.

Boîte 2 : Géométrie sur les variétés

Les formules de mesures familières des géométries euclidienne et symplectique changent quand on remplace le plan plat $\mathbb{R}^2$ par un espace ‹tordu› plus général, comme une sphère, ou une selle. Sur celles-ci, la sphère à courbure positive, comme la selle à courbure négative, dessinons un disque de rayon r comme sur la figure ci-dessous. Si r est assez petit, la circonférence C du disque est donnée par :

$$C = 2\pi\left(r - \frac{1}{6}\kappa r^3 + \cdots\right)$$

où κ est une constante qui vaut $+1$ pour la sphère et -1 pour la selle. C'est seulement pour $\kappa = 0$ qu'on retrouve la formule standard $C = 2\pi r$, ce qui montre que les géométries de la sphère et de la selle sont vraiment non euclidiennes.

De même les géométries symplectiques de la sphère et de la selle sont distinctes de celle du plan. Si on calcule l'aire A du disque, on trouve :

$$A = \pi\left(r^2 - \frac{1}{2}\kappa r^4 + \cdots\right)$$

différente de la familière $A = \pi r^2$ quand $\kappa \neq 0$.

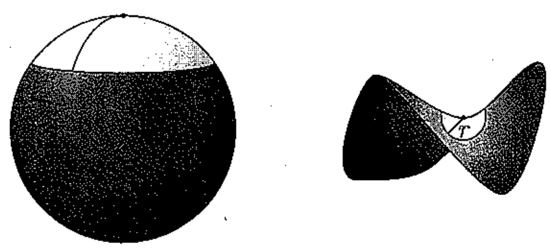
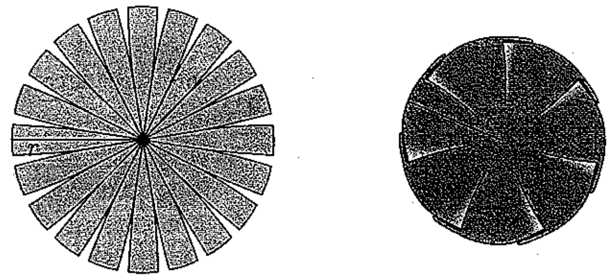


Figure 15

Remarquons que sur la sphère, la circonférence et l'aire sont plus petites que celles d'un disque de rayon r dans le plan. C'est encore plus facile à voir en découpant le disque et en l'aplatissant sur le plan ; il se déchirerait comme on le voit ci-dessous à gauche. Si on fait la même chose pour le disque de la selle, il se replie sur lui-même comme on le voit ci-dessous à droite, ce qui explique pourquoi les valeurs de C et A sont plus grandes sur la selle que sur le plan.



Deux caractéristiques de ces géométries ‹non euclidiennes› ou ‹riemanniennes› sont particulièrement intéressantes : d'abord, la géométrie peut varier beaucoup d'un point à un autre. Ainsi la somme des angles des triangles peut être 200° en un certain point, tandis qu'elle vaut 165° ailleurs. Toute cette information peut toujours être obtenue à partir d'une métrique g, mais cette métrique doit pouvoir être différente en deux points différents. C'est maintenant une *fonction* métrique. La deuxième caractéristique est que les espaces sous-jacents à ces géométries non euclidiennes sont souvent structurellement tout à fait différents des espaces $\mathbb{R}^n$. L'espace peut, par exemple, se refermer sur lui-même de façon très variée. Ces espaces tordus, les *variétés*, sont des généralisations des surfaces, comme la sphère. Ils apparaissent naturellement dans des contextes divers, physiques ou mathématiques, et peuvent être très compliqués. On en trouvera des exemples dans les boîtes 2 et 5 ; on pourra consulter, dans *Scientific American* de juillet 1984, l'article ‹The Mathematics of Three-dimensional Manifolds,› de W.P. Thurston et J.R. Weeks.

En gros, la géométrie riemannienne est la géométrie euclidienne étendue aux espaces courbes de n'importe quelle dimension. Elie Cartan a résumé l'essence de la géométrie riemannienne en observant : *‹Une variété riemannienne est réellement faite d'une infinité de petits morceaux d'espaces euclidiens›*. Sur chacun de ces petits morceaux (intuitivement, les espaces tangents de la variété) la métrique g a une valeur fixe. Ainsi il est possible de calculer la longueur d'une courbe en la décomposant en une chaîne de ‹vecteurs tangents›, puis calculant la longueur de chacun d'eux grâce à la métrique euclidienne de chaque espace tangent, enfin en faisant la somme.

Des remarques analogues s'appliquent à la géométrie symplectique. On généralise le plan symplectique $\mathbb{R}^2$ en une variété de dimension paire et on autorise la géométrie à dépendre du point où on se trouve. Sur chaque espace tangent, la forme symplectique Ω définit une notion d'aire orientée. Ainsi par exemple il est possible de calculer l'aire orientée d'une surface habitant une variété symplectique en découpant cette surface en parallélogrammes infinitésimaux et en ajoutant leurs aires orientées. Comme en géométrie riemannienne, les règles habituelles de calcul ne resteront pas valables dans ce contexte général (voir la boîte 2).

C'est ici qu'apparaît une différence cruciale entre géométries symplectique et riemannienne. On peut penser qu'on construit une géométrie riemannienne en recollant les géométries euclidiennes des espaces tangents. Le recollement peut se faire à peu près n'importe comment (mais de façon lisse). On pourrait essayer de construire une géométrie symplectique de façon analogue, mais il y a une contrainte sur les valeurs de la forme symplectique Ω ainsi construite en des points voisins : il faut que les aires orientées des surfaces bordant n'importe quelle région compacte de dimension 3 soient nulles (identité de Jacobi)(1). Cette condition est responsable de beaucoup des aspects les plus intéressants (parfois frustrants) de la géométrie symplectique.

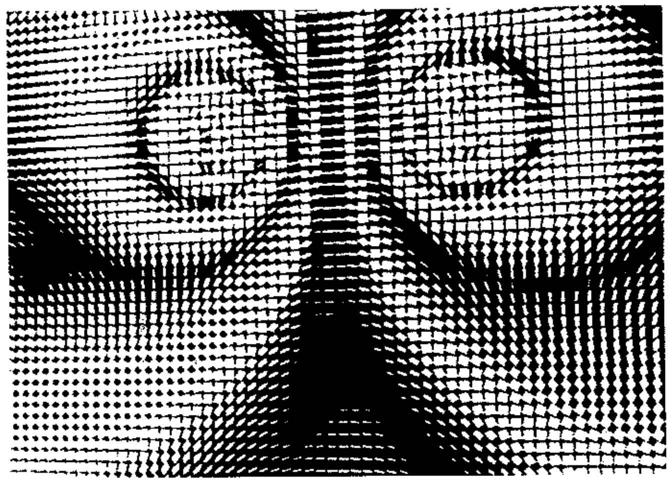
Il n'y a aucune condition de recollement analogue en géométrie riemannienne, avec comme conséquence que *toute* variété admet des métriques riemanniennes. Mais l'identité de Jacobi ne peut pas toujours être satisfaite, ainsi il existe des variétés (de dimension paire) qui n'ont aucune forme symplectique (la sphère S^6 par exemple)(2). Ainsi la géométrie symplectique est assez spéciale. En fait, on ne sait pas exactement quelles variétés peuvent être symplectiques, et les chercheurs commencent à peine à avancer dans la caractérisation et la classification de celles qui le peuvent. Dans cet ordre d'idées, mentionnons ici un résultat important, la découverte par M. Gromov d'une structure symplectique ‹exotique› sur $\mathbb{R}^4$. C'est une géométrie symplectique différente de celle, dite ‹standard›, que nous avons décrite. Même si l'existence de cette géométrie exotique avait théoriquement été établie plusieurs années avant, c'est seulement en 1989 qu'une expression explicite pour la forme symplectique a été trouvée. Grâce à l'informatique graphique (boîte 3), on peut maintenant avoir une idée de la façon dont elle se comporte par rapport à la structure standard. Ce genre de question est au cœur de la *topologie symplectique*, une des parties les plus actives du sujet. Voir *The Symplectic Camel* par Ian Stewart (Nature, Septembre 1987) ainsi que l'article de Viterbo dans ce volume.

Boîte 3 : Géométries symplectiques sur $\mathbb{R}^4$

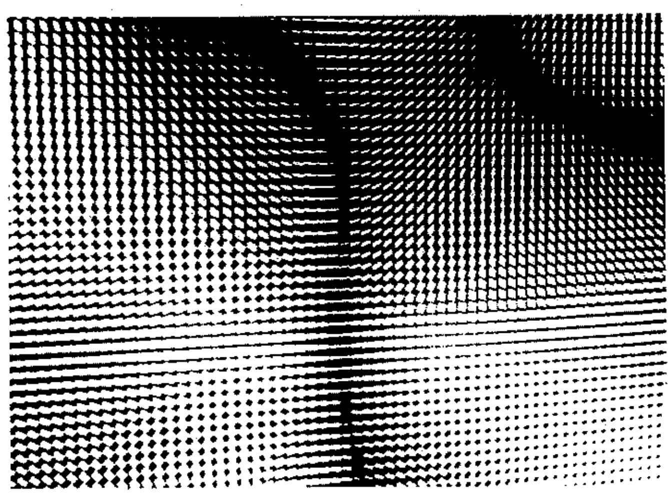
Pour avoir une idée de la structure symplectique exotique de $\mathbb{R}^4$, il est utile de la comparer à la structure standard. Comme nous ne pouvons visualiser les objets de dimension 4, nous ne regarderons que la sphère unité centrée à l'origine de $\mathbb{R}^4$. En restriction à cette sphère, les structure standard et exotique définissent des plans symplectiques en chaque point. Certains de ces plans sont représentés sur ces photographies.

(1) Techniquement, l'identité de Jacobi impose à la 2-forme Ω d'être fermée : $d\Omega = 0$. Profitons-en pour remarquer que la différentielle extérieure est l'analogue pour les formes du crochet de Lie pour les champs de vecteurs.

(2) La sphère S^6 ne peut être symplectique pour des raisons cohomologiques. Mais une variété peut très bien ne pas être symplectique pour d'autres raisons. Par exemple, sur S^4, il n'est pas possible de définir une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée (fermée ou non), dans ce cas l'obstruction est donc plus ‹algébrique›.

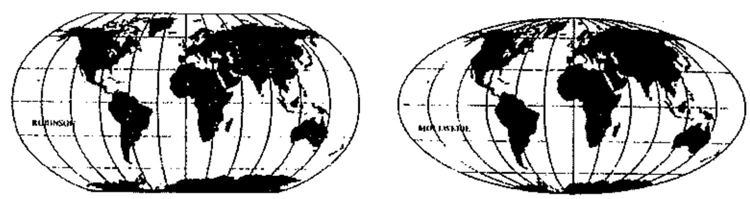


Remarquez comme les plans de la structure symplectique exotique (ci-dessus) sont inclinés par rapport à ceux de la structure standard (ci-dessous). (Les images nous ont été fournies par Larry Bates et Charles Herr, Universités de Calgary et d'Alberta, que nous remercions.)



La conséquence la plus importante de l'identité de Jacobi est que les géométries symplectiques sont ‹plates›. Ce qui veut dire que toutes les variétés symplectiques de la même dimension sont *localement* indistinguables ; on ne peut les reconnaître en les regardant à travers une loupe. C'est seulement globalement, en regardant l'espace tout entier, que des différences entre variétés symplectiques émergent. [C'est en partie pour ça qu'il est si difficile de mettre la main sur la structure symplectique exotique de $\mathbb{R}^4$ — des mesures locales ne peuvent la différencier de la structure standard. En particulier, nous insistons sur le fait que la torsion visible sur la figure dans la boîte 3 est un phénomène global, qui ne peut être détecté localement.] Ceci éclaire mieux comment les géométries symplectique et riemannienne diffèrent, puisque la dernière n'a pas cette propriété ; en fait, les géométries riemanniennes sont en général courbes. Aucune partie d'une sphère, aussi petite soit-elle, ne peut être appliquée sur le plan sans distorsion des *formes* (longueurs et angles). Mais il est possible d'appliquer une partie du globe sur le plan de façon que les *tailles relatives* (aires) soient conservées, un fait familier aux cartographes. Insistons toutefois sur le fait qu'être plat n'empêche pas d'avoir une structure globale compliquée : un cylindre circulaire est plat en géométrie symplectique comme en géométrie riemannienne, mais il n'est pas plan.

Boîte 4 : Cartographie



Une carte tente de représenter la surface d'une sphère sur un plan. Toute carte distord peu ou prou les formes (géométrie riemannienne), même celle considérée habituellement comme la ‹ meilleure ›, la projection de Robinson (1963) à gauche sur la figure. D'autre part, on peut tracer des cartes sans distorsion de taille (géométrie symplectique). Une telle carte est la projection elliptique d'aire égale de Mollweide (1805) sur la figure de droite. Ce phénomène reflète la platitude des variétés symplectiques.

La géométrie symplectique est aussi tout à fait ‹ flexible ›, au moins comparée à la géométrie riemannienne. Pour l'apprécier, utilisons la notion de *symétrie.* Considérons la sphère ronde. Si on la fait tourner autour d'un axe passant par le centre, sa géométrie riemannienne ne change pas. Ainsi les rotations sont des symétries riemanniennes, c'est-à-dire des transformations qui préservent les longueurs et les angles. Si au contraire, on la fait tourner différentiablement, un point pouvant tourner moins vite qu'un point voisin, les angles et les longueurs sont modifiés et la géométrie change. On voit qu'une sphère a un nombre limité de symétries, un ellipsoïde en a encore moins, et la plupart des variétés riemanniennes n'ont pas du tout de symétries. À l'opposé, chaque variété symplectique a un nombre énorme de symétries (transformations préservant les aires orientées). En fait l'ensemble des symétries d'une variété symplectique est toujours de dimension infinie[1] ! Donc on peut déformer les variétés symplectiques beaucoup plus que leurs contre parties riemanniennes ; c'est que les premières sont plates et donc beaucoup moins rigides que les dernières.

Ces observations donnent une idée du caractère de la géométrie symplectique. Mais la géométrie symplectique n'est pas seulement intéressante en elle-même ; dans les vingt dernières années il y a eu beaucoup d'applications de techniques symplectiques à d'autres branches des mathématiques. Probablement la plus importante a été en théorie des représentations, culminant en ce qu'on appelle maintenant la ‹quantification géométrique› (nous rencontrerons cette théorie en physique aussi). Des branches variées de l'analyse, de la théorie des nombres et récemment même de la théorie des nœuds ont aussi profité des idées symplectiques. Un développement particulièrement intéressant est en théorie des catastrophes, contexte dans lequel la géométrie symplectique a été utilisée pour élucider plusieurs mystères de l'optique des lasers. Le livre *Catastrophe Theory* de V.I. Arnold (Springer-Verlag, 1986) présente une version lisible de ces résultats.

Potentiellement encore plus capitale est la philosophie de la ‹symplectification› évoquée récemment par Arnold. Il cite des faits qui indiquent que beaucoup d'idées et de constructions mathématiques ‹ordinaires› ont non seulement des analogues dans le domaine de la géométrie symplectique mais y trouvent en fait leurs fondements (il est certain que l'assertion correspondante est vraie en physique classique). Ceci suggère qu'il serait possible de reformuler complètement une grande partie des mathématiques en termes symplectiques. Arnold a caractérisé ce processus de *symplectification* comme ‹*... un des petits nombres d'opérations du niveau le plus élevé, qui agit... sur toutes les mathématiques à la fois*›. Cela pourrait mener à une révolution comparable à l'invention des nombres complexes ! Dans les termes de Stewart :

‹*Les mathématiciens ont dû se sentir de la même façon quand ils ont découvert que les nombres complexes étaient plus qu'un nouveau gadget : toutes les idées des mathématiques, de la géométrie des courbes à l'analyse des équations aux dérivées partielles, étaient mûres pour la complexification. Les mathématiques ont explosé brutalement.*›

La géométrie symplectique pourrait bien illuminer le ciel mathématique une fois de plus. Mais c'est pour le futur ; parlons maintenant de son rôle en physique.

---

[1] L'ensemble des symétries d'une structure géométrique sur une variété muni de la composition forme un groupe (de Lie). Il est bien connu que le groupe d'*isométries* d'une métrique riemannienne est toujours de dimension finie. Mais en géométrie symplectique, l'objet analogue — le groupe des *symplectomorphismes* — est énorme (en fait, son algèbre de Lie s'identifie à l'ensemble de toutes les 1-formes fermées sur la variété en question).

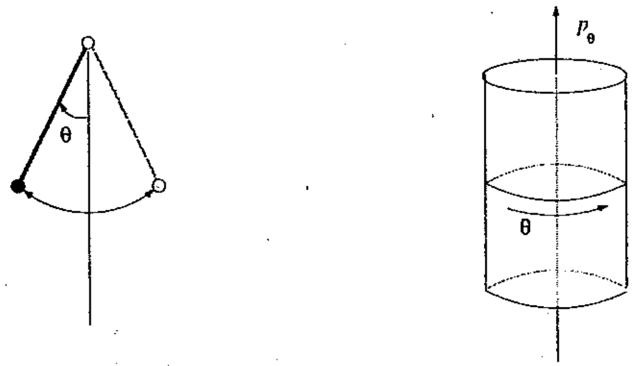
La géométrie symplectique a été ‹inventée› par Lagrange en 1808 au cours de son étude fondamentale de la mécanique céleste. Elle est apparue d'abord comme une technique analytique grâce à laquelle on pouvait simplifier l'écriture des équations du mouvement planétaire (voir dans A. Weinstein, *Lectures on Symplectic Manifolds* (American Mathematical Society, 1977), une belle discussion mathématique de la géométrie symplectique comme des travaux de Lagrange). Ces techniques furent substantiellement développées et amplifiées par Hamilton, qui a montré que les découvertes de Lagrange s'appliquaient à la mécanique dans son ensemble. La collection d'idées et de procédures de calcul qui en a résulté est connue sous le nom de *mécanique hamiltonienne.* Cette théorie a été ensuite étendue et raffinée par Jacobi, Liouville et Poisson, entre autres, et forme maintenant la base structurelle d'essentiellement toute la physique classique.

Le paradigme de la mécanique hamiltonienne est la dynamique des particules, l'étude du mouvement d'un objet soumis à des forces variées, comme un électron dans les champs électromagnétiques à l'intérieur d'un tube cathodique. Pour déterminer la trajectoire qu'un tel objet va suivre, il ne suffit pas de connaître sa position initiale ; on doit aussi connaître sa vitesse initiale, ou, ce qui revient au même, son moment initial. C'est alors seulement qu'on peut ‹prédire l'avenir›, c'est-à-dire deviner l'emplacement et les mouvements de l'objet à toutes les dates futures.

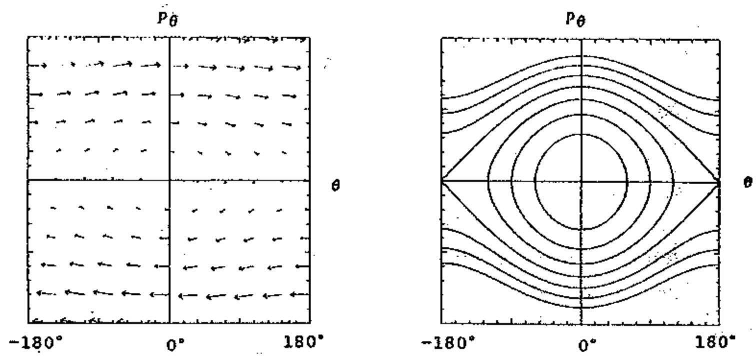
Ceci amène à étudier la dynamique des particules sur un espace, l'*espace des phases*, constitué des positions ou ‹configurations› q possibles et des vitesses ou ‹moments› possibles p de la particule. Par exemple, l'espace des phases d'une particule dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de tous les jours est $\mathbb{R}^6$, dont les points sont repérés par les six quantités (x,y,z,p_x,p_y,p_z) donnant les trois composantes des position et moment. De même le pendule plan a un espace de phases qui est un cylindre circulaire paramétré par (θ,p_θ), où θ est la position angulaire et p_θ le moment angulaire du poids. D'autres corps comme les particules relativistes à spin ou les solides couplés ont des espaces de phases plus compliqués.

Boîte 5 : Le flot dans l'espace de phases du pendule

Un pendule plan est un poids accroché au bout d'un fil léger, libre de se balancer dans un plan donné. Les positions possibles du poids sont paramétrées par l'angle θ, avec $-180° \leqslant \theta \leqslant 180°$. Le moment angulaire correspondant p_θ peut prendre n'importe quelle valeur. L'espace de phases du pendule plan est donc un cylindre circulaire, avec θ parcourant la base dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et p_θ parcourant l'axe. Comme 180° et $-180°$ représentent la même position (‹en haut›), ces configurations sont identifiées, d'où le cercle.



Les forces qui agissent sur le poids sont la gravitation et la tension du fil. Le schéma des vecteurs de flot et des trajectoires dynamiques qu'ils engendrent est représenté ci-dessous. Pour rendre les choses plus claires, nous avons ‹déroulé› l'espace de phases pour en faire une bande rectangulaire ; les deux droites verticales correspondant à $\theta = \pm 180°$ doivent être identifiées. Le point au centre représente un équilibre stable, le pendule immobile pendant verticalement. Les ellipses entourant ce point correspondent aux balancement du pendule. Leurs amplitudes croissent jusqu'à ce que le point atteigne ‹juste› le sommet. Ici on a un équilibre instable (en $\theta = \pm 180°$, $p_\theta = 0$), avec le pendule stationnaire pointant vers le haut. Les autres trajectoires ondulées représentent des mouvements où le poids fait des tours complets dans le sens des aiguilles d'une montre (en haut) ou dans l'autre (en bas).



L'idée sous-jacente est que lorsque l'on connaît l'*état* initial (q,p) d'une particule dans l'espace des phases et les forces auxquelles elle est soumise, on a assez d'informations pour décrire le mouvement de la particule en fonction du temps. Ceci peut être visualisé très clairement (Boîte 5). Spécifier le réseau des forces, c'est associer une flèche (le vecteur de ‹flot›) à chaque point de l'espace des phases. Ainsi une particule partant d'un état donné se meut le long d'une unique trajectoire (‹ligne de flot›) comme les flèches l'indiquent, les trajectoires remplissant l'espace des phases et deux d'entre elles ne se coupant jamais. Si on travaillait dans l'espace des configurations (les q) au lieu de l'espace des phases (les q et les p), on n'aurait pas une description aussi élégante et ordonnée du mouvement de la particule. Ainsi l'espace de phases est la bonne scène où se joue la dynamique.

L'image du mouvement de la particule que nous avons esquissée est analogue (au sens figuré comme au sens littéral) au flot d'un fluide. En fait la dynamique est en un sens mathématique précis, le flot d'un fluide dans un espace de phases. Ce ‹flot de phase› a toutefois une propriété assez spéciale : il *préserve les aires*, en d'autres termes les aires des nappes de dimension 2 du fluide ne sont pas modifiées quand elles coulent le long du flot. Comme on peut considérer le flot d'un fluide sur une variété comme une transformation (dépendant du temps) sur cette variété, on conclut que la dynamique est une transformation dépendant du temps de l'espace des phases qui préserve les aires. Et, là où il y a de l'aire, il doit y avoir des formes symplectiques !

Ces remarques constituent le lien fondamental entre mécanique et géométrie : *les espaces de phases de la dynamique des particules sont des variétés symplectiques et la dynamique correspond à une transformation symplectique dépendant du temps.* Ces faits ont des conséquences importantes pour la physique. En fait, c'est largement à la présence de la structure symplectique sur l'espace de phases qu'est dû le gigantesque succès de la description du monde physique par la mécanique hamiltonienne.

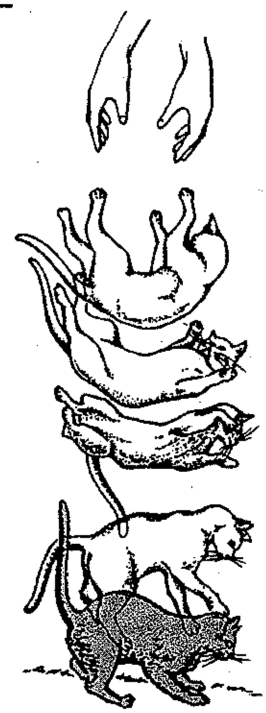
Que fait précisément la forme symplectique *physiquement* ? Deux choses reliées, d'abord. Premièrement, elle montre comment les positions q et moments p généralisés s'organisent entre eux. Pour un système compliqué comme la sonde Galileo-Jupiter, où il y a des centaines de variables de configuration q et de moment p, il est crucial de relier le bon moment à la bonne position. Rappelons-nous maintenant qu'une forme symplectique sert, mathématiquement, à décomposer un espace de dimension $2n$ en une somme de n plans transverses. Dans un sens, elle rassemble les $2n$ directions indépendantes $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ de l'espace de phases en paires[1] : $(q_1,p_1),\dots,(q_n,p_n)$. Ceci explique du point de vue physique pourquoi les variétés symplectiques sont de dimension paire : chaque position doit être accouplée avec un moment. [Nous verrons que cet accouplement a des conséquences cruciales en mécanique quantique.] Deuxièmement la forme symplectique nous dit exactement comment convertir les forces agissant sur le système en vecteurs de flot sur l'espace de phases, nous autorisant ainsi à calculer ces flots et donc les mouvement possibles du système. En bref, elle convertit des données *dynamiques* — sur les forces

(1) C'est particulièrement évident pour l'écriture locale de la forme symplectique $\Omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ où $\wedge$ est le produit extérieur des formes.

— en informations *cinématiques* — sur le mouvement du système. Pour en savoir plus sur le ‹pourquoi› et le ‹comment› de la géométrie symplectique en physique, nous renvoyons les lecteurs aux livres *Foundations of Mechanics*, d'Abraham et Marsden (Benjamin-Cummings, deuxième édition, 1978), et *Symplectic Techniques in Physics*, de Guillemin et Sternberg (Cambridge University Press, deuxième édition, 1989).

Boîte 6 : Le chat de Yang-Mills

Un chat qui tombe se modélise mécaniquement par deux cylindres reliés par un joint à rotule. En termes de théorie du contrôle, le problème est de manœuvrer ce système, en faisant tourner les deux cylindres autour de leurs axes et entre eux, pour arriver à l'orientation désirée de façon optimale. La géométrie symplectique fournit une description succincte de ce problème et facilite grandement sa résolution. En effet, le chat atterrit sur ses pieds en résolvant les équations de Yang-Mills ! Contrairement à un conte de bonne femme la queue du chat ne sert à rien : les chats de l'île de Man atterrissent sur leurs pattes comme les autres (d'aucuns prétendent que cette dernière assertion a été vérifiée expérimentalement).



n plus de ces premiers devoirs, les structures symplectiques s'exploitent dans des buts ariés en mécanique. Elles sont un moyen efficace de relier les symétries (de translation, rotionnelles, ‹internes› ou de jauge, etc) des systèmes physiques à des quantités (moment-ıergie, moment angulaire, charge électrique, etc) qui sont conservées au cours du temps. 'e telles ‹lois de conservation› sont très utiles dans l'analyse générale du comportement ɜs systèmes, particulièrement en dynamique non linéaire, où il est souvent impossible obtenir des résultats quantitatifs exacts. Les méthodes symplectiques sont aussi cruciales ɔur l'étude de problèmes de stabilité (par exemple, les petites oscillations de l'antenne : Galileo peuvent-elles croître de façon incontrôlée ?), et ont beaucoup amélioré nos ɔssibilités de modéliser et prévoir le comportement dynamique de systèmes mécaniques ımpliqués. Une belle application de la géométrie symplectique (utilisant beaucoup de ces ées) est la question du chat qui atterrit toujours sur ses pattes. Il se trouve que le chat y rive en se comportant comme une particule dans un champ de Yang–Mills !

Ainsi la forme symplectique est un ingrédient essentiel en mécanique classique, théoriquement et pratiquement. Et récemment, dans une formulation due à Sternberg, elle a pris un rôle encore plus transcendant. Dans l'approche de Sternberg, les forces elles-mêmes sont incorporées dans la forme symplectique, qui est maintenant *tout ce qui reste !* Le cercle se referme : la géométrie symplectique est la mathématique de la mécanique, et la mécanique hamiltonienne n'est rien d'autre que la géométrie symplectique de l'espace des phases.

Si la géométrie symplectique est bien visible dans le contexte de la mécanique, elle s'étend bien au delà de cette petite branche de la physique. En fait, la plupart des systèmes classiques, aussi complexes soient-ils, s'étudient par des techniques hamiltoniennes. Ceci inclut des modèles de la formation des galaxies, les circuits électriques et les modèles du noyau. Si on autorise des espaces de phases de dimension infinie, on peut aussi étudier ainsi les champs classiques. De cette façon, on a appris beaucoup sur la gravitation et sur d'autres champs, sur la théorie de l'élasticité, les plasmas et même la corrosion. Plusieurs proches parentes de la géométrie symplectique sont aussi très importantes. L'une est la *géométrie de contact*, une extension de la géométrie symplectique aux espaces de dimension *impaire*. Elle joue un rôle en optique, analogue à celui joué par la géométrie symplectique en mécanique. [C'est pour cette raison que la mécanique et l'optique ont eu des développements parallèles ; ce sont des cousines germaines mathématiques.]

Dans notre présentation, jusque là, nous n'avons considéré que la physique classique. Une des grandes leçons du vingtième siècle est que la description de la plupart (sinon de tous) les systèmes physiques doit être par la *mécanique quantique*. Les différences entre approches classique et quantique sont tant prononcées que profondes, mais ça nous entraînerait un peu loin de les discuter en détail. Nous nous limiterons donc à quelques observations de base (il y a un joli compte-rendu de certains des aspects les plus intéressants de la théorie quantique dans le livre de Feynman *QED* (Princeton University Press, 1985)).

Le point crucial est que, si la physique classique est complètement déterministe, la mécanique quantique est, par essence, probabiliste. Une conséquence est qu'alors qu'un observateur classique peut (en principe) mesurer les quantités physiques avec n'importe quelle précision, un observateur du monde de la mécanique quantique ne le peut pas : il y a des limitations *inévitables* à la précision à laquelle certaines paires de quantités peuvent être mesurées simultanément. C'est le contenu du célèbre ‹principe d'incertitude› d'Heisenberg. Par exemple une mesure simultanée de la position q et du moment p d'un électron sera ‹incertaine› pour q comme pour p, avec des erreurs Δq et Δp satisfaisant l'inégalité :

$$\Delta q \cdot \Delta p \geqslant h/4\pi$$

où h est la constante de Planck $h = 6.6246 \times 10^{-34}$ Joules-secondes. Comme elle est très petite, cette incertitude est négligeable dans la plupart des systèmes macroscopiques. Ce n'est pas le cas pour les systèmes microscopiques.

La géométrie symplectique joue-t-elle en physique quantique le rôle qu'elle joue en physique classique ? On pourrait croire que non. D'abord les états de la mécanique quantique ne se représentent pas par les points de l'espace de phases classique. L'espace des états est plutôt un espace de dimension infinie, un *espace de Hilbert*. De plus celui-ci est relié à l'espace de configurations classique (l'espace de toutes positions q) du système et non à son espace de phases (l'espace des moments p et des positions q). L'objet symplectique fondamental de la physique classique, l'espace des phases, a donc ‹disparu› dans la théorie quantique. Toutefois, comme le sourire du chat du Cheshire, des restes de géométrie symplectique subsistent. L'un d'eux apparaît dans la formule ci-dessus (principe d'incertitude) : l'accouplement symplectique d'une position et du moment correspondant. En fait, il n'y a pas de principe d'incertitude pour des quantités qui ne sont pas symplectiquement appariées. D'autres reliquats sont les ‹lois de quantification de Bohr–Sommerfeld–Maslov›, qui expliquent pourquoi certains paramètres physiques comme la charge électrique et le spin des particules élémentaires prennent seulement des valeurs discrètes.

Mais la géométrie symplectique est intimement impliquée dans la transition de la description classique d'un système à sa version quantique, c'est-à-dire dans la *quantification*. Pour mesurer la signification de ceci, considérons la relation entre les descriptions classique et quantique d'un système. *En principe*, comme nous l'avons déjà signalé, tout système physique est, par nature, de la mécanique quantique. Toutefois, pour la plupart des systèmes assez macroscopiques, la description quantique a une unique ‹limite classique› — une description classique qui approxime, dans un sens approprié, la description quantique. *En pratique*, d'autre part, on comprend presque toujours mieux, au départ, la limite classique que la description quantique complète. [Il y a deux raisons pour ça : le bon sens de tous les jours est classique, aussi nous pensons en termes classiques, et aussi la description classique est plus simple que la quantique.] Ainsi les physiciens ont plus souvent à construire une formulation quantique connaissant sa limite classique que l'inverse. Autrement dit, il peut arriver de devoir ‹quantifier› un système classique.

Malheureusement, ce n'est pas une opération évidente. Une des difficultés est que, si la limite classique d'un système est unique (quand elle existe), il y a toujours beaucoup de systèmes quantiques différents qui ont la *même* limite classique. En fait on a un théorème d'interdiction, qui affirme qu'il est *impossible* de trouver un schéma de quantification qui s'applique à *tous* les systèmes classiques.

Malgré ces obstacles, les efforts pour quantifier systématiquement telle ou telle famille limitée de systèmes persistent. Une des procédures les plus fructueuses est la *quantification géométrique*. Reposant sur les travaux de Kostant au M.I.T. et de Souriau à Marseille, la quantification géométrique est une belle application de certaines des idées les plus sophistiquées de la géométrie symplectique.

L'idée qui la sous-tend est d'utiliser la structure symplectique de l'espace de phases classique pour construire l'espace de Hilbert quantique. L'étape clé est la *polarisation* de l'espace de phases ; c'est-à-dire la séparation invariante des positions q et des moments p. Cette distinction est utilisée pour récupérer un espace de configurations, dont nous avons signalé qu'il était relié à l'espace de Hilbert quantique. Une fois l'espace de phases polarisé, on peut créer une théorie quantique du système.

Alors que la quantification géométrique est un outil utile, elle peut être aussi bien difficile que subtile. Par exemple, on a en général quelque liberté dans le choix de la polarisation, ceci reflétant l'existence de systèmes quantiques différents avec la même limite classique. Ainsi la théorie peut produire des systèmes quantiques non équivalents et il faut d'ordinaire recourir à l'expérience pour choisir le bon (physiquement). À l'extrême opposé, il existe des variétés symplectiques qui ne peuvent être polarisées. On ne sait pas s'il existe des systèmes physiques authentiques dont les espaces de phases ont cette propriété : dans tous les cas, ce qu'il faut faire de ces variétés symplectiques ‹ purement classiques › n'est pas clair.

Un domaine de la physique où la quantification géométrique pourrait jouer un rôle intéressant est la relativité générale. La physique classique du champ de gravitation est bien comprise dans les termes de la théorie d'Einstein. Maintenant, de toutes les interactions fondamentales de la nature, la gravitation est la seule qui n'a pas une description quantique consistante. C'est une des énigmes majeures de la physique théorique, et c'est pourquoi la ‹ gravitation quantique › est un domaine de recherche très actif.

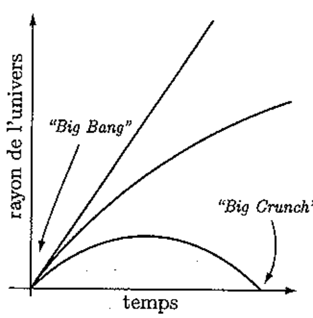
Une des raisons qui font que le champ de gravitation résiste si fortement à la quantification est que son espace de phases est non seulement de dimension infinie, mais en plus pas du tout linéaire. Pour accéder à un peu de connaissance en gravitation quantique, un stratagème habituel est de ‹ congeler › toutes les dimensions sauf un nombre fini en demandant que le champ de gravitation soit constant dans l'espace (mais en l'autorisant à dépendre du temps). On construit ainsi des modèles (relativement) utilisables de l'Univers et de son champ de gravitation appelés *cosmologies homogènes*. Elles constituent des ‹ laboratoires › pour étudier la quantification de la gravitation et la quantification géométrique est très utile dans ces ‹ expériences ›.

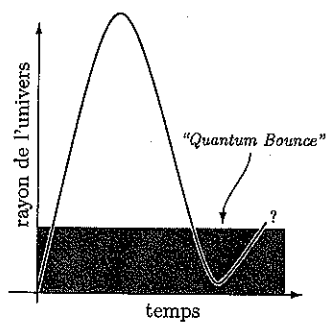
Une des expériences conduites par les auteurs dans ce laboratoire concerne le problème fascinant des *singularités* gravitationnelles. Ce sont des phases gravitationnellement très violentes, incroyablement denses, à travers lesquelles l'univers doit passer à certains moments de son évolution, d'après la relativité générale. Une telle singularité, le ‹ Big Bang ›, a presque certainement déjà existé, au moment de la création. Y aura-t-il une autre singularité finale, le ‹ Big Crunch › ? Les données de l'observation ne permettent pas de conclure pour le moment, mais si l'attraction gravitationnelle était assez forte pour vaincre l'expansion actuelle de l'univers, alors il semble que l'univers devrait s'effondrer, implacablement, en une fin ardente.

Boîte 7 : Le sort de l'univers

La théorie classique de la gravitation d'Einstein prédit que l'univers a évolué à partir d'une singularité initiale, le Big Bang. Mais ce que deviendra l'univers, nul ne le sait ; les scénarios standard (pour les modèles homogènes et isotropes) sont esquissés ci-dessous à gauche. L'univers est actuellement en expansion et son sort dépend de la vitesse à laquelle la gravitation ralentit cette expansion. Ceci dépend enfin crucialement de la densité de masse moyenne ρ de l'univers. La valeur critique de ρ est $\rho_c \approx 10^{-30} gm/cm^3$. Les modèles avec $\rho = \rho_c$ échapperont de justesse à l'effondrement gravitationnel (courbe du milieu). Dans les modèles avec $\rho > \rho_c$ (comme la troisième courbe), l'attraction gravitationnelle vainc l'expansion et le modèle s'effondre vers une singularité finale, le Big Crunch. Des observations indiquent que $\rho \approx 10^{-31}$, mais la fin est loin d'être claire.

Les cosmologues se sont demandés si les effets quantiques, qui seront d'importance primordiale quand l'univers aura atteint la taille sous-atomique (région ombrée de la figure de droite), pourront empêcher l'effondrement final. On pourrait concevoir un rebondissement vers une nouvelle phase d'expansion.





Cette prédiction est basée sur la relativité générale *classique*. Toutefois, quand la gravitation comprime l'univers pour le ramener à des dimensions microscopiques, des effets *quantiques* doivent prédominer, et il y a eu beaucoup de spéculations disant que ces effets pourraient ralentir, voire arrêter l'effondrement. Les auteurs ont utilisé la quantification géométrique pour étudier cette possibilité dans le cadre des cosmologies homogènes. Si la conclusion est loin d'être définitive, il y a (malheureusement !) des indications que les effets quantiques *ne pourront* empêcher l'effondrement catastrophique final de l'univers en une singularité.

Dans toute cette discussion, nous avons laissé une question importante sans réponse : d'où vient le mot ‹symplectique› ? Du grec $\sigma\nu\mu\pi\lambda\epsilon\kappa\tau\iota\kappa\upsilon\sigma$, qui donne en latin ‹complexe›.

L'utilisation de ce mot en mathématiques est due à Hermann Weyl qui, dans un effort pour éviter une confusion sémantique, a rebaptisé l'obscur (à l'époque) ‹groupe du complexe linéaire› le ‹groupe symplectique›. Mais, quelle que soit son étymologie, l'adjectif ‹symplectique› signifie ‹tressés ensemble›, ou ‹tissés›. C'est merveilleusement adapté, car c'est cet enchevêtrement — déjà évident dans l'expression de la forme Ω — qui caractérise le mieux, et même est l'essence de la géométrie symplectique comme de la mécanique hamiltonienne. Et c'est le tressage complexe des mathématiques et de la physique qui donne à la géométrie symplectique sa puissance et ses espoirs.