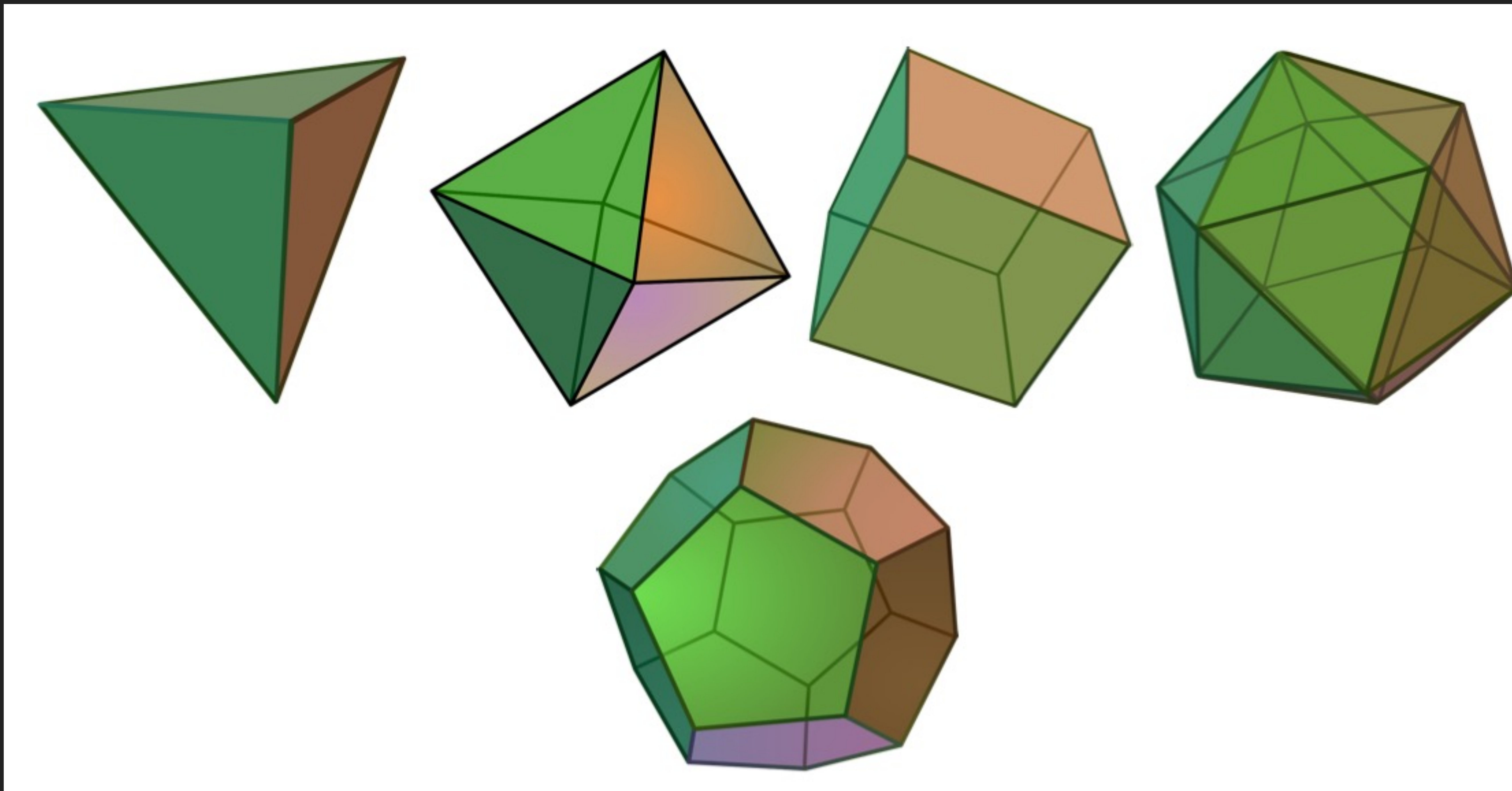
CHANGING THE CULTURE 2023
JAYADEV ATHREYA
UNIVERSITY OF WASHINGTON AND THE PACIFIC INSTITUTE FOR THE MATHEMATICAL SCIENCES
JOINT WORK WITH DAVID AULICINO + PAT HOOPER
JOINT WORK WITH DAMI LEE

PATHS AND PATHWAYS

NARRATIVES

- Mathematics is about telling stories
- Geometry gives visual, tactile, and artistic learners an entry point to mathematics
- Geometry is a living, breathing, growing subject



GEODÄTISCHE LINIEN AUF POLYEDERFLÄCHEN.

Von **Paul Stäckel** (Hannover).

Adunanza del 27 maggio 1906.

§ 1.

Ordinäre Polyeder.

Polyeder heisse ein endliches, zusammenhängendes Stück des Raumes, das von einer endlichen Anzahl von Polygonen, den Seitenflächen, begrenzt wird, Polygon aber werde ein endliches, zusammenhängendes Stück einer Ebene genannt, dessen Begrenzung aus einer endlichen Anzahl von geradlinigen Strecken, den Seiten, gebildet wird; die Endpunkte der Seiten liefern die Ecken des Polyeders.

Geht man auf einer Seite von einer Ecke bis zur nächsten auf der Seite liegenden Ecke des Polyeders, so erhält man eine Kante; eine Seite kann demnach aus mehreren Kanten zusammengesetzt sein. Es gibt zwar Polyeder, bei denen von einer Kante eine beliebige grade Zahl von Seitenflächen ausgeht, im Folgenden sollen aber nur solche Polyeder betrachtet werden, bei denen jede Kante genau zwei Seitenflächen angehört. Zwei Seitenflächen, die eine Kante gemeinsam haben, heissen benachbart in Bezug auf diese Kante. Liegen zwei benachbarte Seitenflächen in einer Ebene, so sollen sie durch Streichung der gemeinsamen Kante zu einer Seitenfläche vereinigt werden; alsdann schneiden sich in jeder Ecke des Polyeders mindestens drei Seitenflächen. Zwei benachbarte Seitenflächen können mehrere Kanten gemeinsam haben, diese Kanten sind aber notwendig Teile einer Geraden, nämlich der Schnittgeraden der Ebenen, in denen die beiden Seitenflächen liegen.

Ein Polyeder, das den soeben ausgesprochenen Bedingungen genügt und bei dem ausserdem die Seitenflächen einfach zusammenhängende Flächen sind und die Oberfläche, die Polyederfläche, aus einem zusammenhängenden Stücke besteht, soll ein ordinäres Polyeder heissen.

GEODÄTISCHE LINIEN AUF POLYEDERFLÄCHEN *).

MIT EINEM ANHANG ÜBER DAS VERHALTEN DER GEODÄTISCHEN IN EINEM VIELFACHEN PUNKTE EINER KRUMMEN FLÄCHE.

Von **Carl Rodenberg** (Hannover).

Adunanza dell'11 novembre 1906.

§ 1.

Polyeder.

Den Begriff *Polyeder* fasse ich nach MÖBIUS (Gesammelte Werke, Bd. II. Seite 475, f.) als ein System dergestalt mit einander verbundener ebener Polygone, den *Flächen* des Polyeders, dass jede Kante eines Polygons die Kante eines und nur eines der übrigen Polygone ist, sie wird dadurch auch Kante des Polyeders. Das Polyeder soll nur aus *einem* zusammenhängenden Teile bestehen, welcher ganz im Endlichen verläuft. Das ebene Polygon kann, abweichend von dem MÖBIUS'schen, jedes zusammenhängende Stück der Ebene sein, dessen Begrenzung aus einem oder mehreren geradlinigen Kantenzügen ohne Doppelpunkte gebildet wird, welche getrennt von einander verlaufen. Die aufgestellte Forderung der Endlichkeit des Polyeders bedingt es, dass *ein* Kantenzug alle übrigen umschliesst. Durch diese Fassung ist ein sich später als wichtig erweisendes Polyeder zugelassen, welches aus einem EULER'schen hervorgeht, wenn man in dasselbe

*) Vergl. die Abhandlung mit gleichem Titel von Herrn PAUL STÄCKEL in t. XXII (1906), der «Rendiconti», pp. 141-151 vom 27 Mai 1906 und meine vorläufigen Bemerkungen zu derselben im «Supplemento», anno I (1906), n° 5 (September-Oktober), pp. 60-61.

Die vorliegende Arbeit enthält in erweiterter Form, wie sie die Bezugnahme auf die STÄCKEL'sche erheischt, den Inhalt eines Aufsatzes, den ich Anfang Juni der Redaktion des «Archivs für Mathematik und Physik» einreichte, nun aber, der veränderten Sachlage entsprechend, ebenfalls in den «Rendiconti» zum Abdruck bringe. Eine Gegenüberstellung der Abweichungen in den Resultaten würde ebenso viel Raum eingenommen haben wie die Entwicklung selbst, weshalb ich den ursprünglichen Gang beibehalten habe. Das Hauptgewicht lege ich auf die Behandlung des, von den regulären Körpern allein Schwierigkeiten bietenden, Dodekaeders, obgleich es mir nicht gelungen ist, für den mitgeteilten Satz, der mir schon seit Jahren bekannt ist, einen Beweis zu erbringen. Die im «Supplemento» angeführte Ausnahme existiert nicht, ihre Erwähnung geschah auf Grund eines nachträglich hinein gebrachten Irrtums. Es gibt immer zwei Scharen.

Die Bezeichnung «singuläre Geodätische» für eine geodätische Linie, welche an einer Ecke vorbei geht, im Gegensatze zur «Regulären», welche eine Kante in endlicher Entfernung von ihren Ecken trifft, habe ich von Herrn STÄCKEL herübergenommen.

THERE ARE NO CLOSED SINGULAR GEODESICS ON THE TETRAHEDRON, OCTAHEDRON, CUBE, AND ICOSAHEDRON

ARITHMETIC PLATONIC SOLIDS

CONCERNING THE TRANSITIVE PROPERTIES OF GEODESICS ON A RATIONAL POLYHEDRON

By Ralph H. Fox and Richard B. Kershner

This paper considers geodesics on ordinary polyhedrons[1] in an abstract space. A geodesic on an ordinary polyhedron becomes an ordinary straight line if the sequence of faces belonging to that geodesic is thought of as spread out on a plane. We shall be concerned in what follows only with *rational polyhedrons*, that is, ordinary polyhedrons in which the sum of all angles at any corner is a rational multiple of π. The problem may be considered as an elementary illustration of the 'billard ball' problem considered by Birkhoff in Chapter VI of his Colloquium Publication *Dynamical Systems* and was suggested to us by Wintner. The geometrical condition of rationality defined above is, in the main, the condition on integrability in the sense of Birkhoff or, in the case of a periodic solution, the rationality of the rotation number.

If a direction is moved parallel to itself along any closed curve, which meets no corners, it can only come back to a finite number of positions, for the closed curve can be deformed continuously, without passing over any corners, into another which admits a decomposition into simple loops, each loop consisting of a closed circuit about a corner. Each circuit changes the direction by the sum of the angles about the corner and there is but a finite number of corners.

Now[2] an "Ueberlagerungsfläche" P for the rational polyhedron Π may be defined as follows. Consider an arbitrary but fixed direction[3] on one of the faces of Π and all possible simple curves on Π starting from a fixed point in the interior of that face and not meeting any corners. Let the initial direction be moved parallel to itself along each of these curves. If two such curves have a common end point but different directions there, we consider the two end points to be on different faces. The totality of faces, distinct in this sense, constitutes the *Ueberlagerungsfläche* P. The most important properties of P are the following.

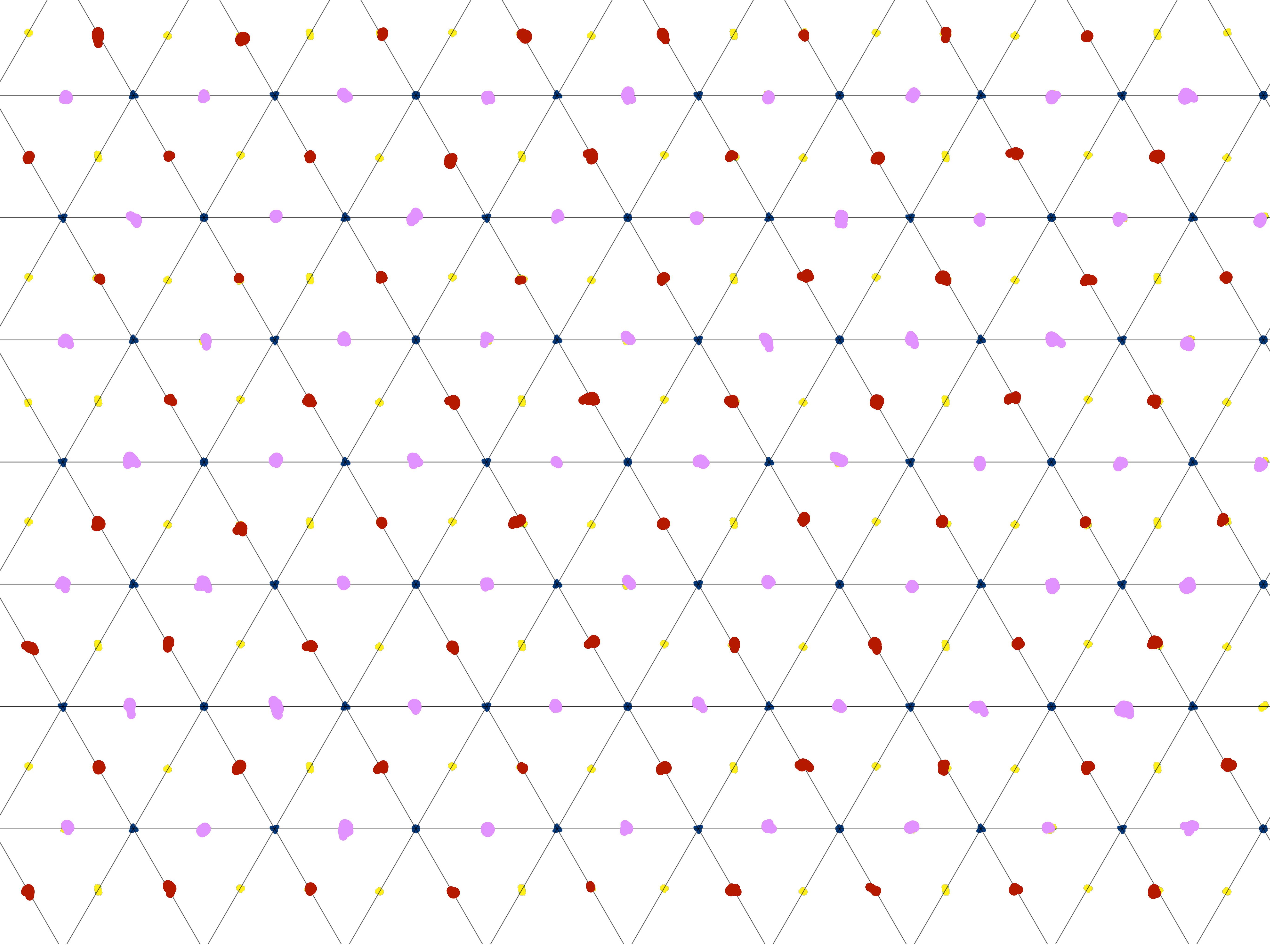
(1) P is a finite polyhedron. For to each face of Π there corresponds a finite number of faces of P.

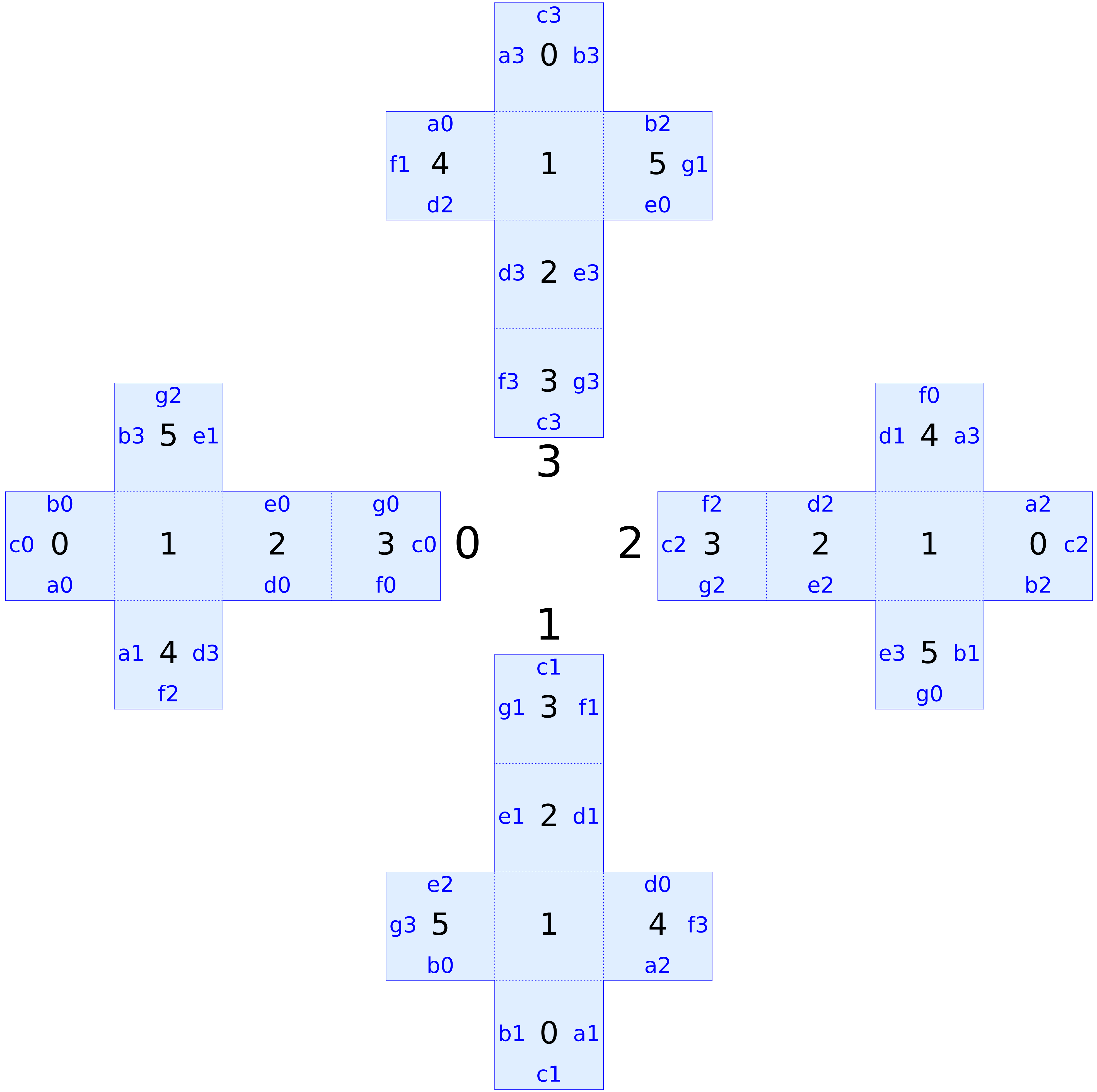
Received by the Editors of the Annals of Mathematics November 9, 1934, accepted by them, and later transferred to this journal.

[1] Ordinary polyhedrons are meant in the sense of E. Steinitz, *Polyeder und Raumeinteilungen*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, vol. III, Part I_2, p. 15. Geodesics on polyhedrons have been considered, for instance, by P. Stäckel, *Geodätische Linien auf Polyederflächen*, Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. 22 (1906), pp. 141–151 and by C. Rodenberg, *Geodätische Linien auf Polyederflächen*, ibid., vol. 23 (1907), pp. 107–125.

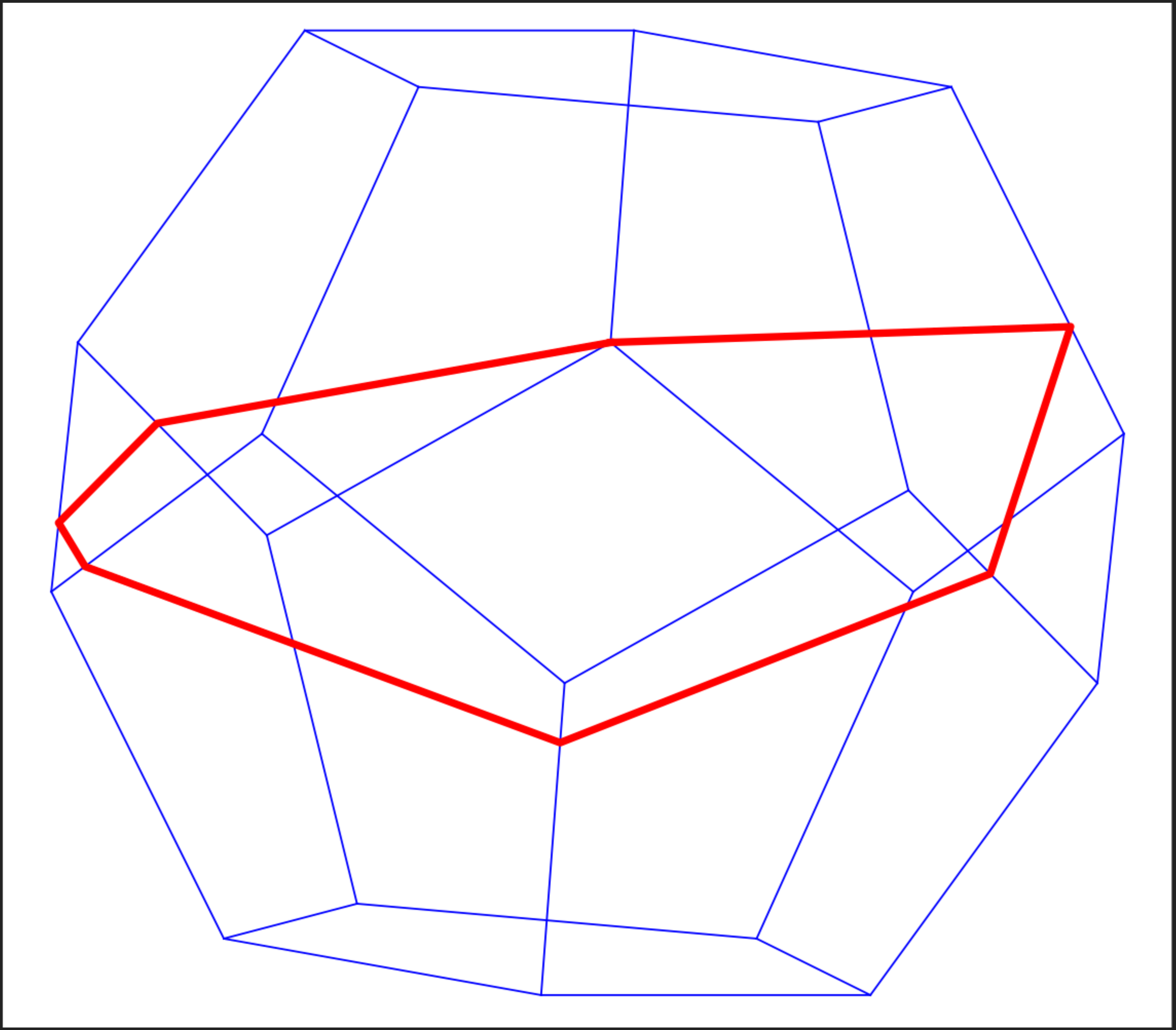
[2] For the ideas involved here cf. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Berlin, 1923.

[3] The particular choice of this direction has, of course, no influence on the construction we are going to make.

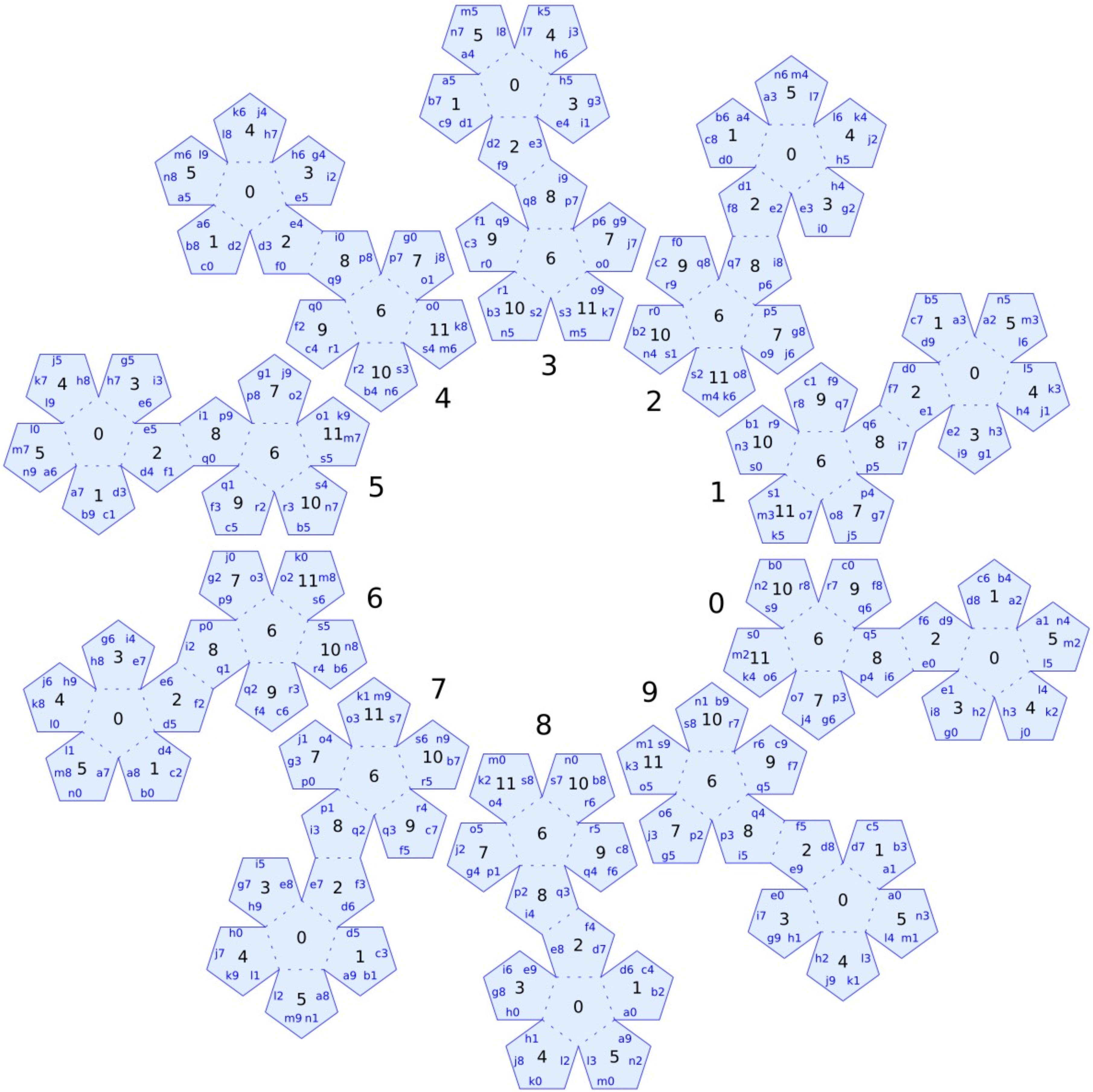




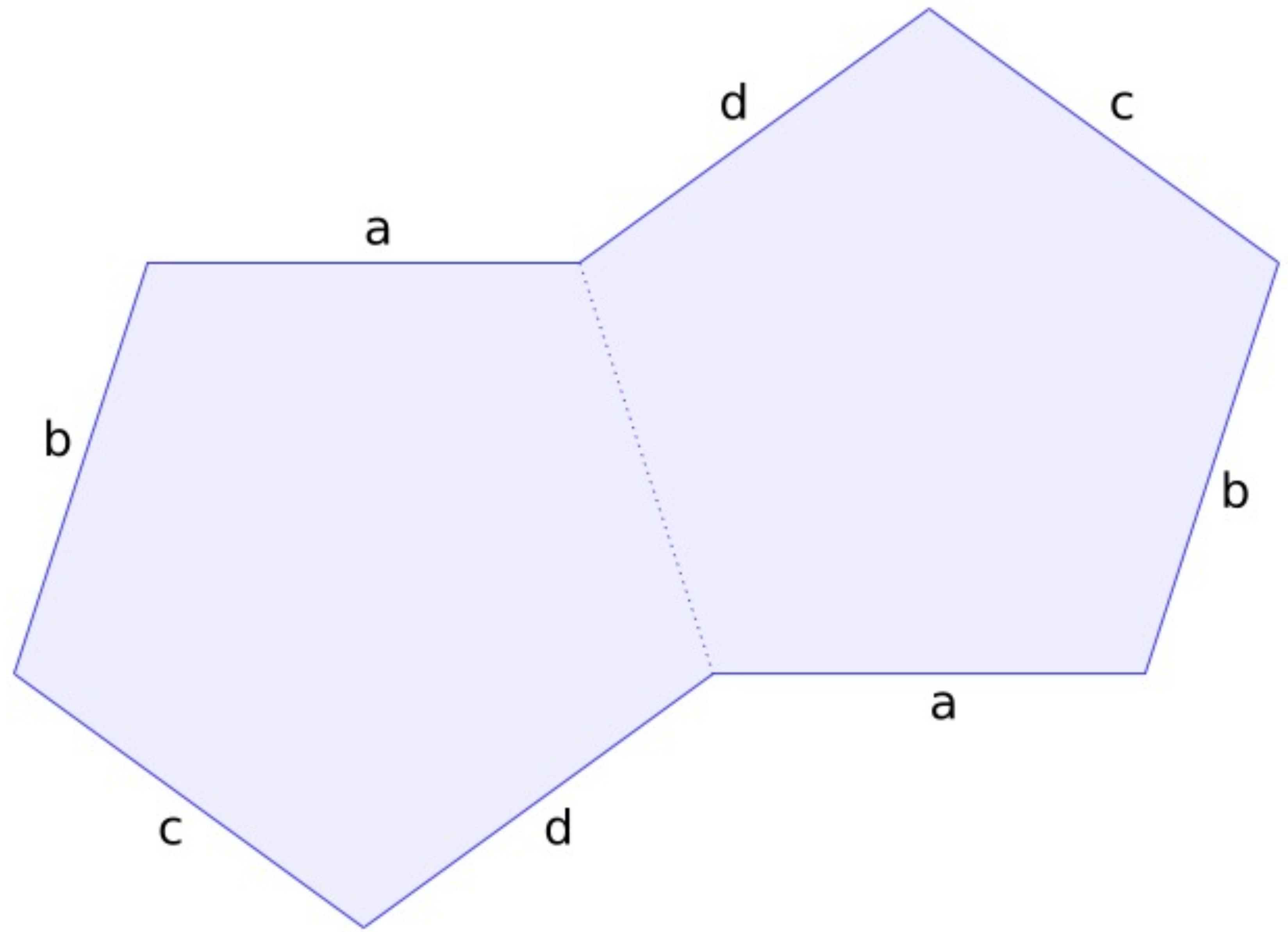
c3
a3 0 b3
a0
f1 4
d2
1
b2
5 g1
e0
d3 2 e3
f3 3 g3
c3
3
g2
b3 5 e1
b0
c0 0
a0
1
e0
2
d0
g0
3 c0
f0
a1 4 d3
f2
0
2
f0
d1 4 a3
f2
c2 3
g2
d2
2
e2
1
a2
0 c2
b2
e3 5 b1
g0
1
c1
g1 3 f1
e1 2 d1
e2
g3 5
b0
1
d0
4 f3
a2
b1 0 a1
c1



A closed saddle connection on the Dodecahedron



3
4
2
5
1
6
0
7
9
8


d
c
a
b
b
a
c
d

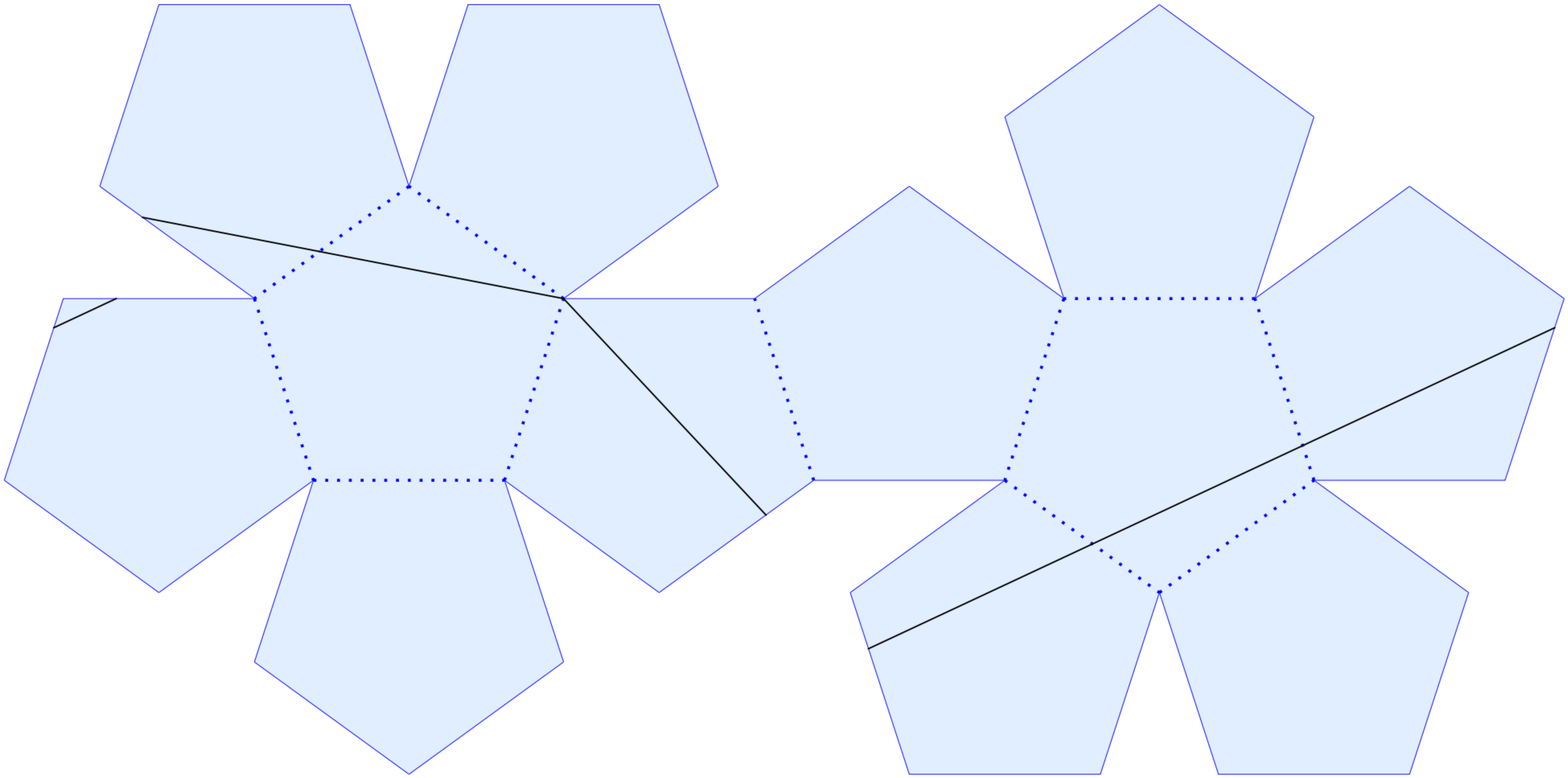
THERE ARE 31 EQUIVALENCE CLASSES OF CLOSED SADDLE CONNECTIONS, AND 422 OF MAXIMAL CYLINDERS

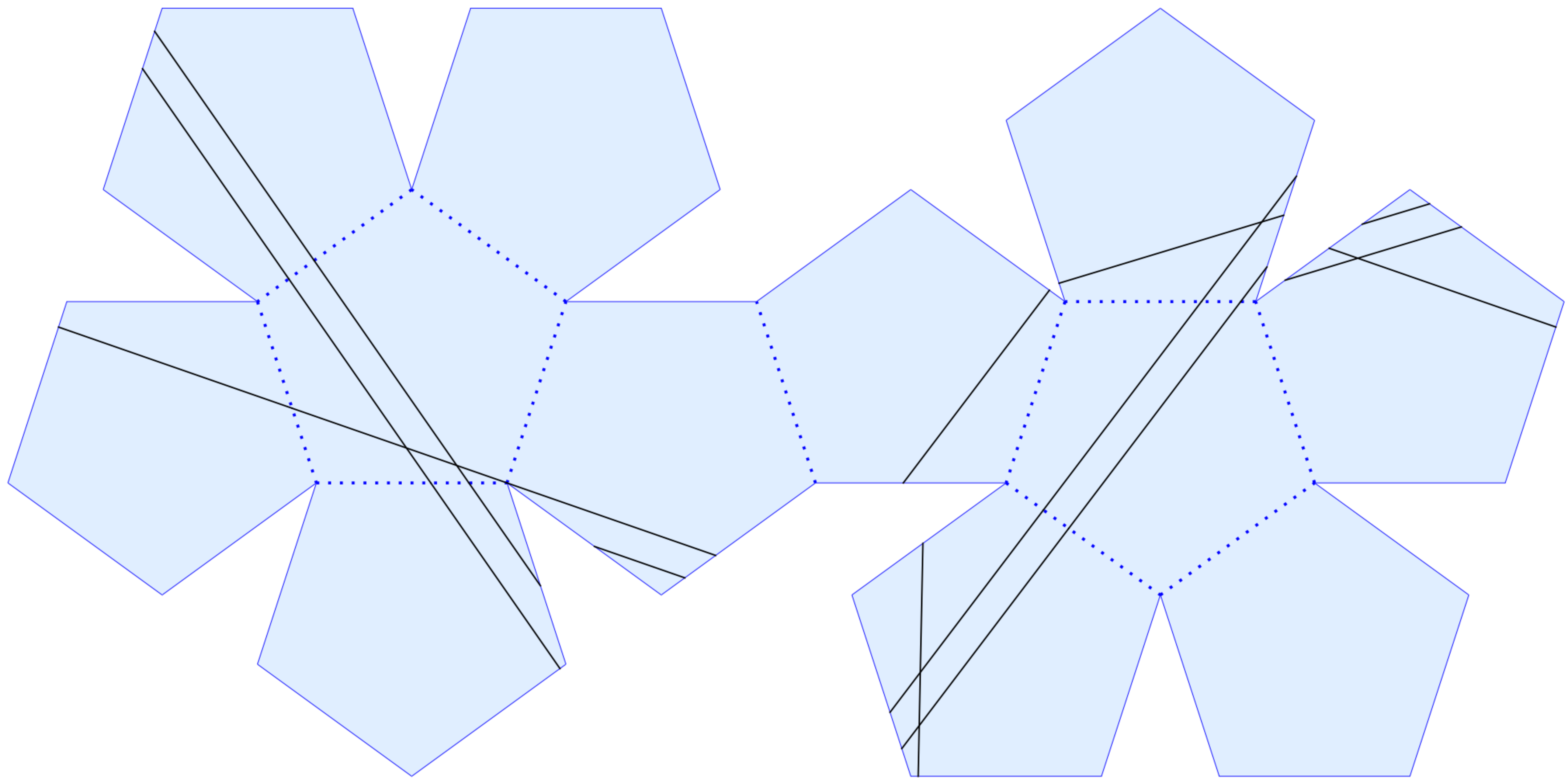
AAH using FlatSurf

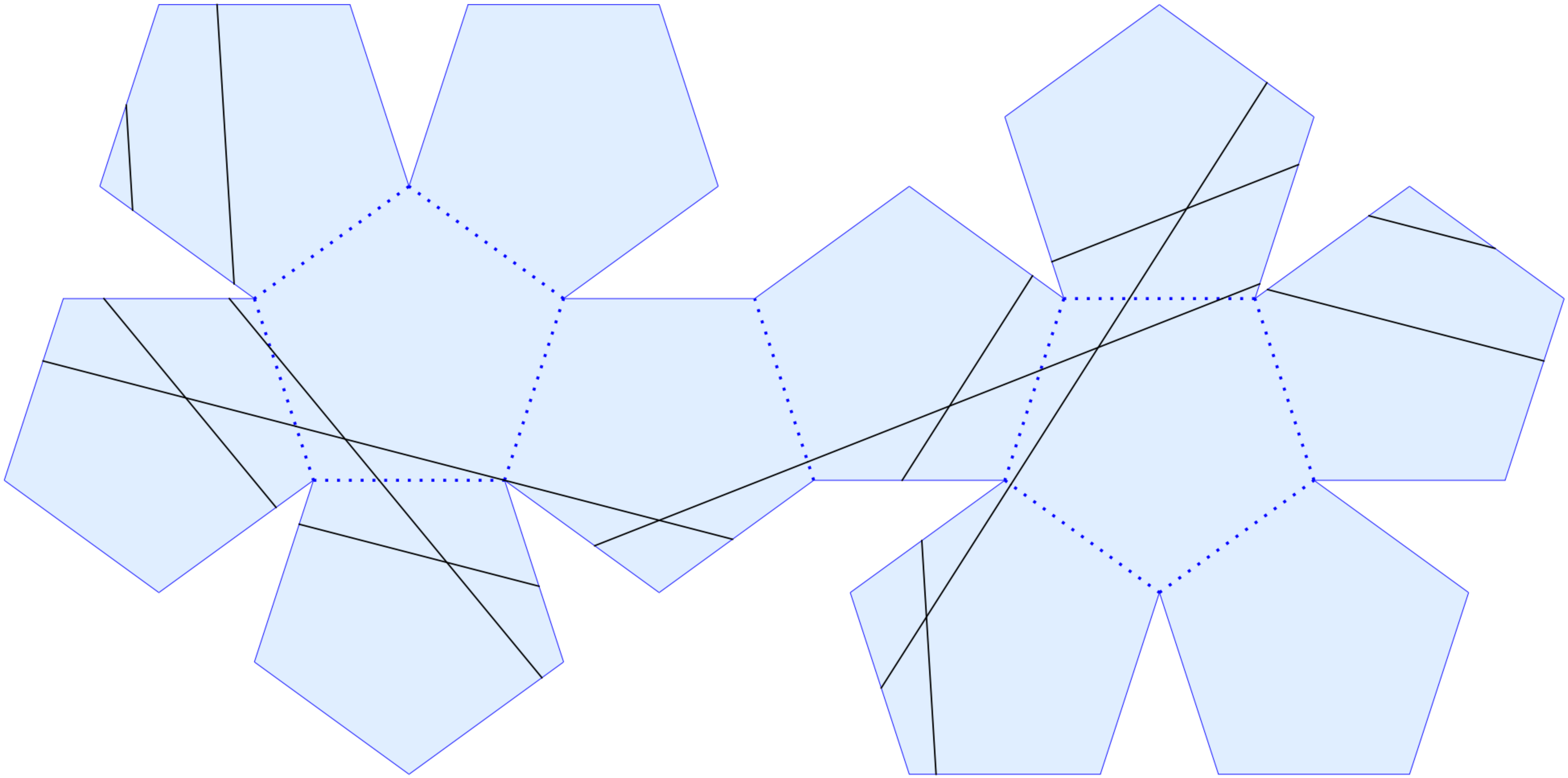
Appendix C. List of closed saddle connections on the dodecahedron

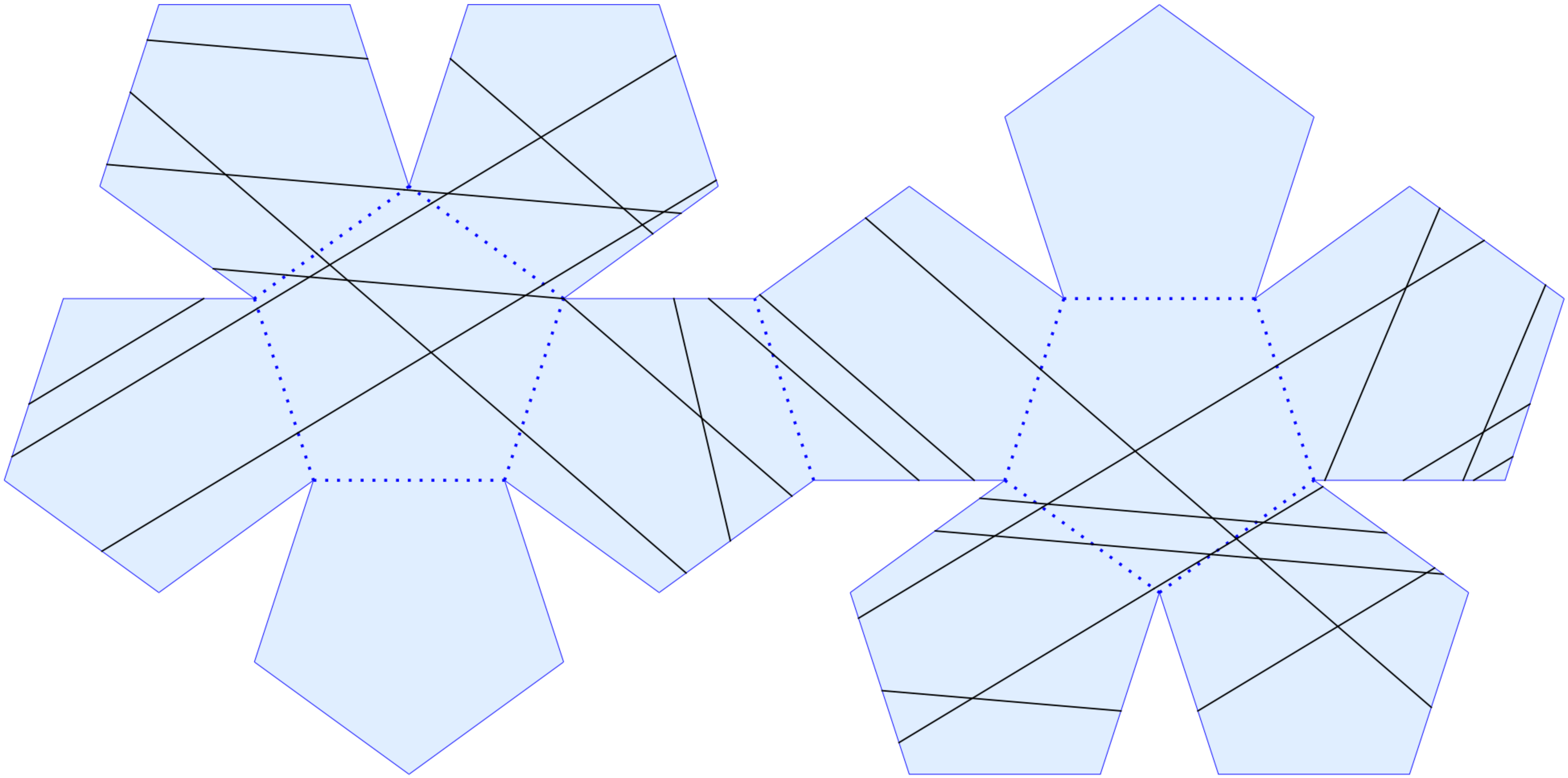
	Coset Representative	Exact Vector	Approximate Length	Approximate Vector
1	RRRTT	$\left(-8s^2+27,\ s^3-4s\right)$	16.2386	(15.9443, -3.07768)
2	RRRTTRRT	$\left(-20s^2+74,\ 6s^3-22s\right)$	49.0816	(46.3607, -16.1150)
3	RTTTRT	$\left(-22s^2+78,\ 4s^3-16s\right)$	49.1630	(47.5967, -12.3107)
4	RRTRTTTT	$\left(-43s^2+154,\ 3s^3-11s\right)$	94.9181	(94.5755, -8.05748)
5	RTRRTTRRRT	$\left(-41s^2+146,\ 15s^3-55s\right)$	98.0031	(89.3394, -40.2874)
6	RRTTRTRRRT	$\left(-40s^2+144,\ 16s^3-58s\right)$	98.2417	(88.7214, -42.1895)
7	RRTRRTTTT	$\left(-48s^2+176,\ 4s^3-14s\right)$	110.117	(109.666, -9.95959)
8	RTTRTTTT	$\left(-52s^2+183,\ 3s^3-12s\right)$	111.521	(111.138, -9.23305)
9	RTRRTTTTT	$\left(-51s^2+182,\ 3s^3-11s\right)$	111.810	(111.520, -8.05748)
10	RTRTRTT	$\left(-51s^2+184,\ 7s^3-25s\right)$	114.941	(113.520, -18.0171)
11	RRRTTRTTTT	$\left(-61s^2+226,\ 5s^3-17s\right)$	142.196	(141.700, -11.8617)
12	RRRTTTTRTT	$\left(-63s^2+232,\ 9s^3-31s\right)$	146.570	(144.936, -21.8213)
13	RRTTRRTRT	$\left(-70s^2+253,\ 17s^3-62s\right)$	162.687	(156.262, -45.2672)
14	RRTRTRRTT	$\left(-72s^2+261,\ 11s^3-40s\right)$	164.109	(161.498, -29.1522)
15	RTRRTRTRRT	$\left(-90s^2+323,\ 27s^3-98s\right)$	211.047	(198.623, -71.3418)
16	RRRTTRTTRT	$\left(-92s^2+332,\ 20s^3-74s\right)$	211.985	(204.859, -54.5002)
17	RRRTRTTTTRT	$\left(-93s^2+334,\ 19s^3-71s\right)$	212.102	(205.477, -52.5981)
18	RTRRRTTTRTT	$\left(-109s^2+390,\ 13s^3-49s\right)$	242.130	(239.366, -36.4832)
19	RRTRTRRRTRTT	$\left(-132s^2+479,\ 19s^3-68s\right)$	300.613	(296.581, -49.0714)
20	RTRRTRTTTTTT	$\left(-150s^2+550,\ 8s^3-28s\right)$	343.284	(342.705, -19.9192)
21	RRRTTRTTTTRT	$\left(-164s^2+590,\ 34s^3-126s\right)$	375.042	(363.358, -92.8855)
22	RTTRTRRRTTRT	$\left(-182s^2+659,\ 43s^3-154s\right)$	422.378	(407.482, -111.180)
23	RTTTTTTRTRTT	$\left(-191s^2+694,\ 27s^3-95s\right)$	435.359	(430.044, -67.8150)
24	RRRTTRTRTTRT	$\left(-268s^2+969,\ 61s^3-220s\right)$	619.524	(598.633, -159.525)
25	RRTTTRTRRTRT	$\left(-270s^2+977,\ 67s^3-242s\right)$	628.894	(603.869, -175.640)
26	RTRTRRTRRTTTT	$\left(-336s^2+1214,\ 26s^3-94s\right)$	752.761	(749.659, -68.2641)
27	RTTRTRTRTRT	$\left(-373s^2+1348,\ 89s^3-323s\right)$	865.091	(832.527, -235.120)
28	RTRTRTRTTRT	$\left(-395s^2+1428,\ 89s^3-323s\right)$	912.920	(882.123, -235.120)
29	RTTRRTTTRRTRRT	$\left(-414s^2+1499,\ 129s^3-466s\right)$	986.655	(926.866, -338.243)
30	RTRRTRTRRTTRT	$\left(-480s^2+1739,\ 111s^3-400s\right)$	1114.04	(1075.66, -289.898)
31	RRTRTRTRTRRTT	$\left(-604s^2+2187,\ 93s^3-336s\right)$	1374.11	(1352.29, -243.904)

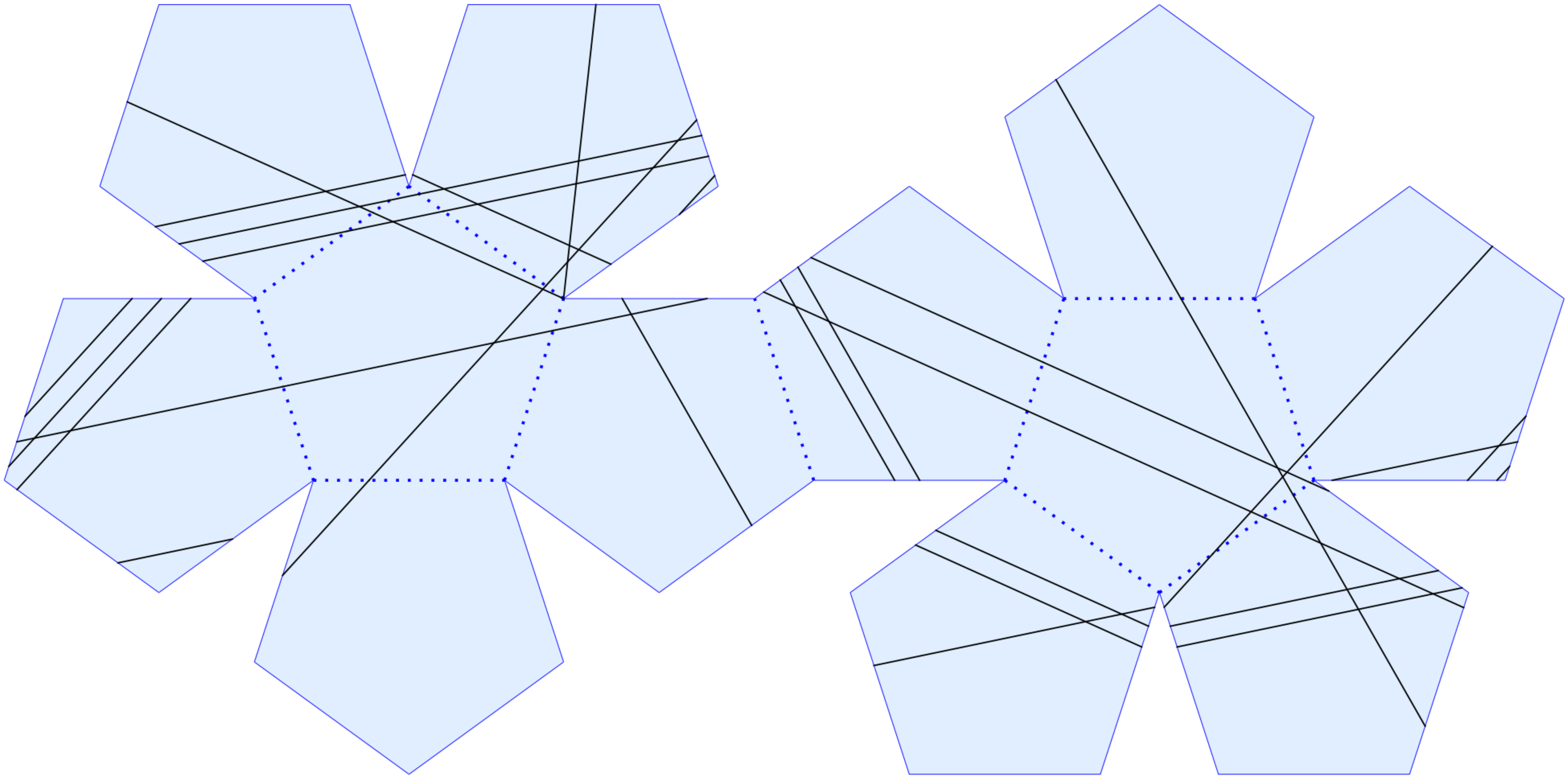
Table 3. Representatives of closed saddle connections, sorted by length. Lengths are normalized so that edges of the pentagon have length two. Here, $s = 2\sin(\pi/5) = \sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}$.

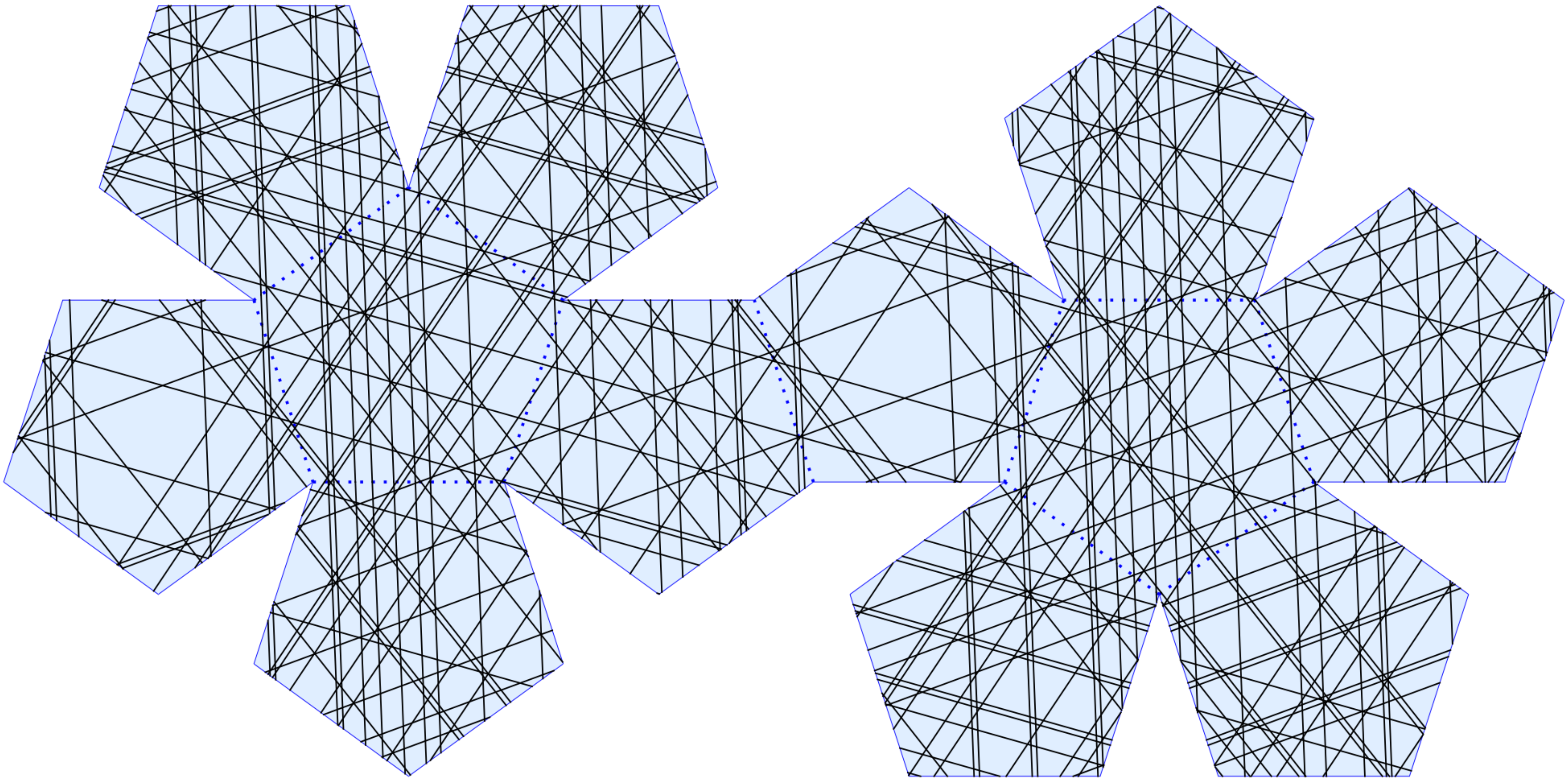


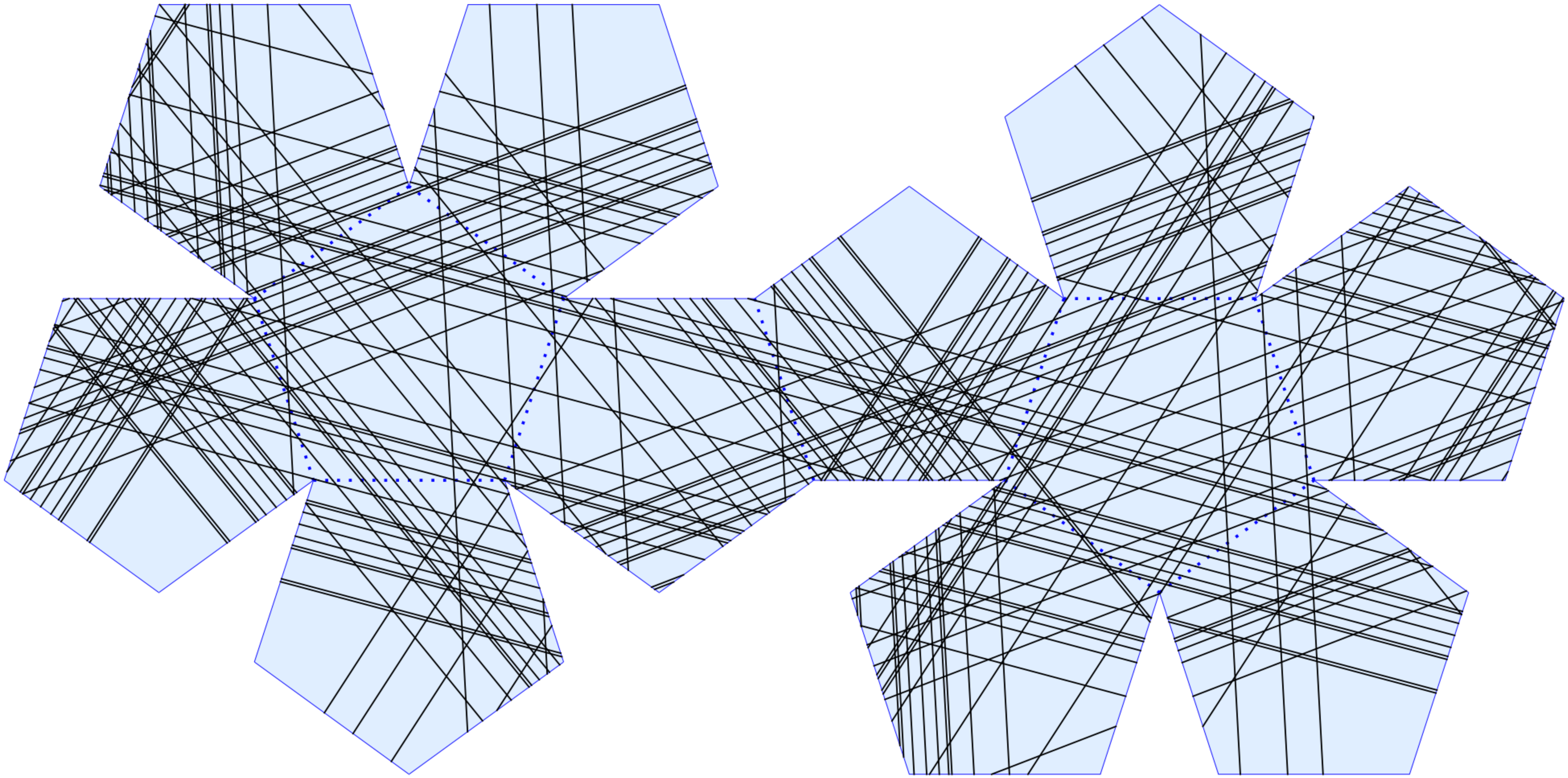


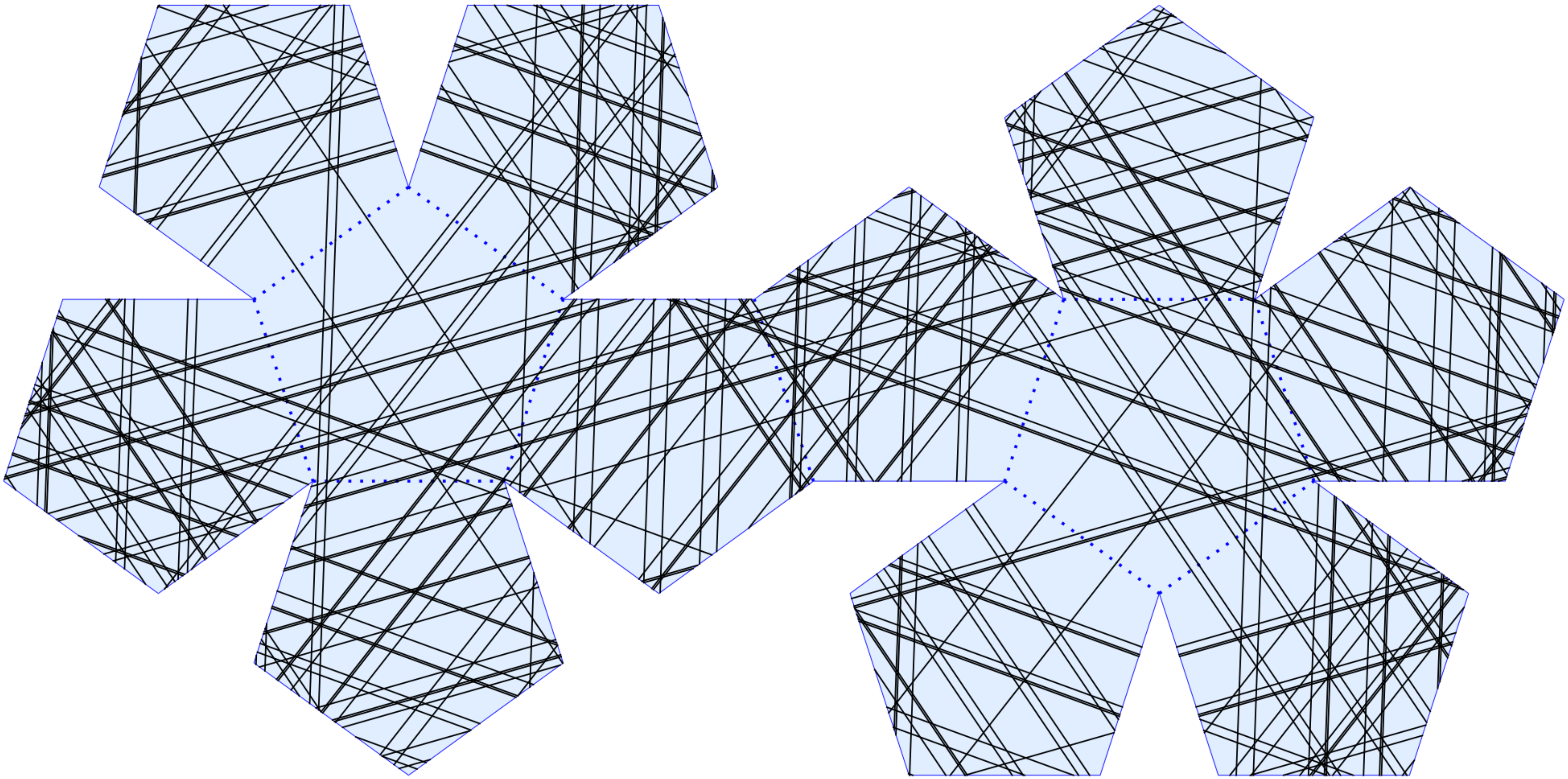


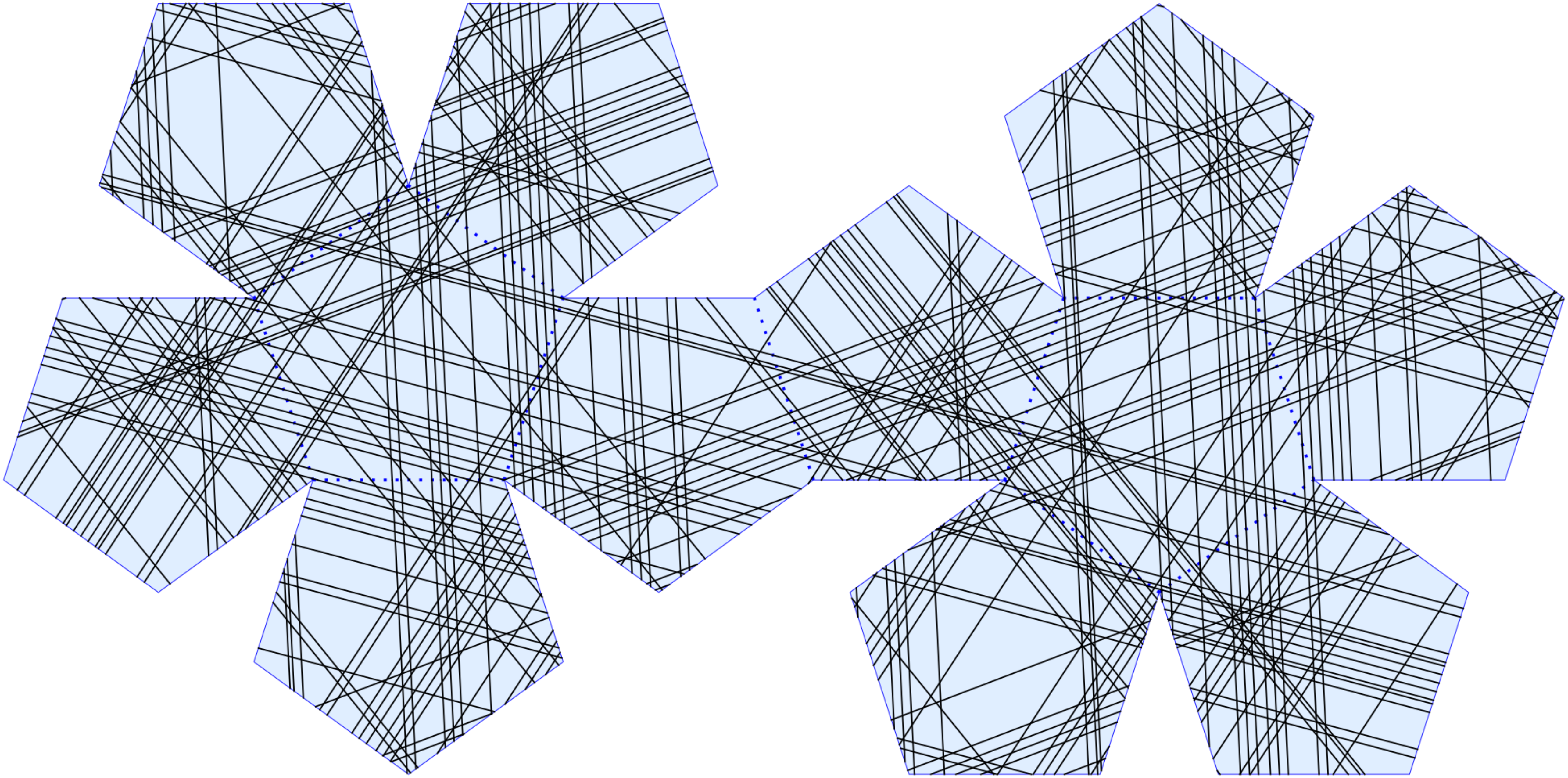


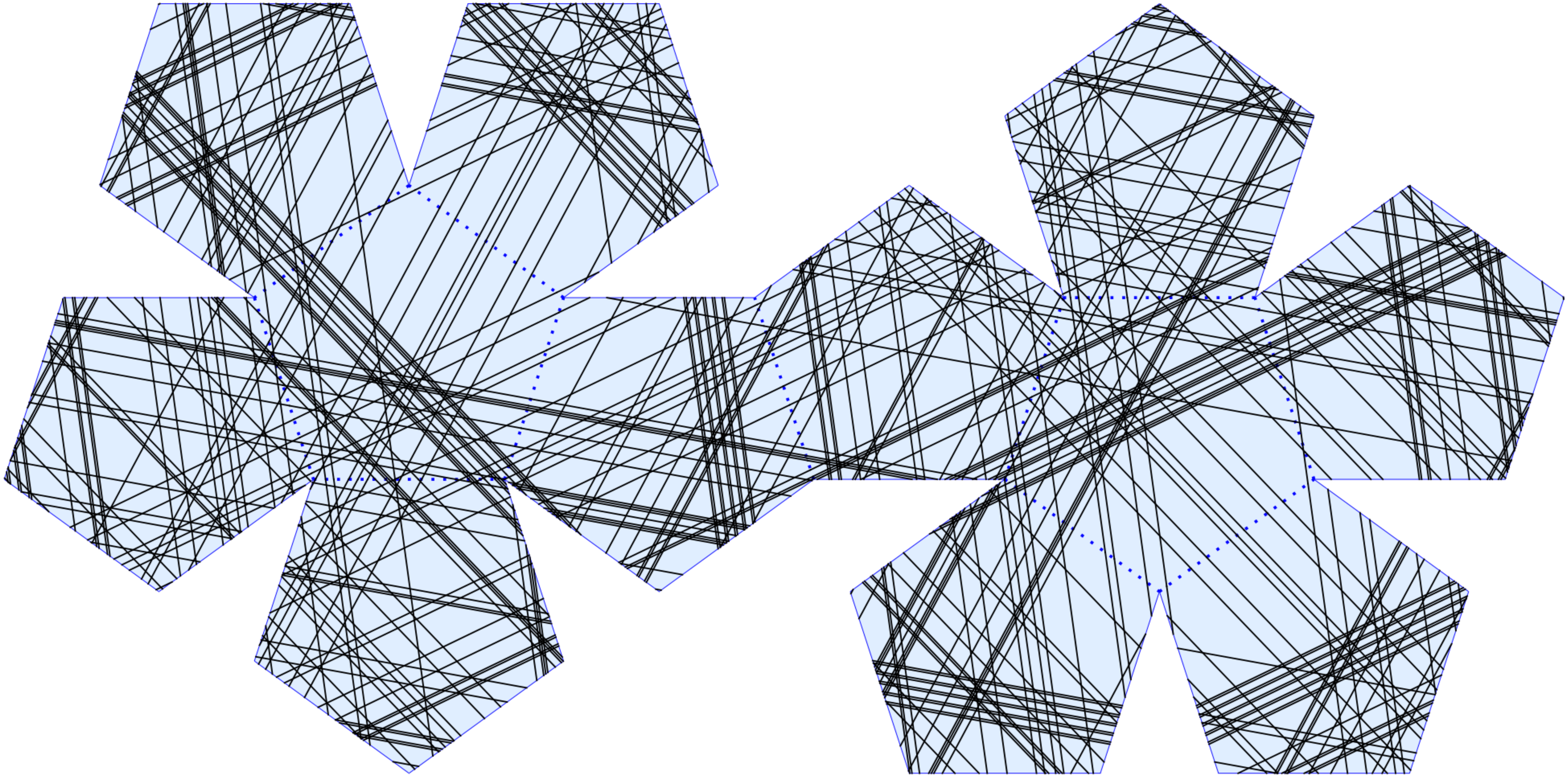


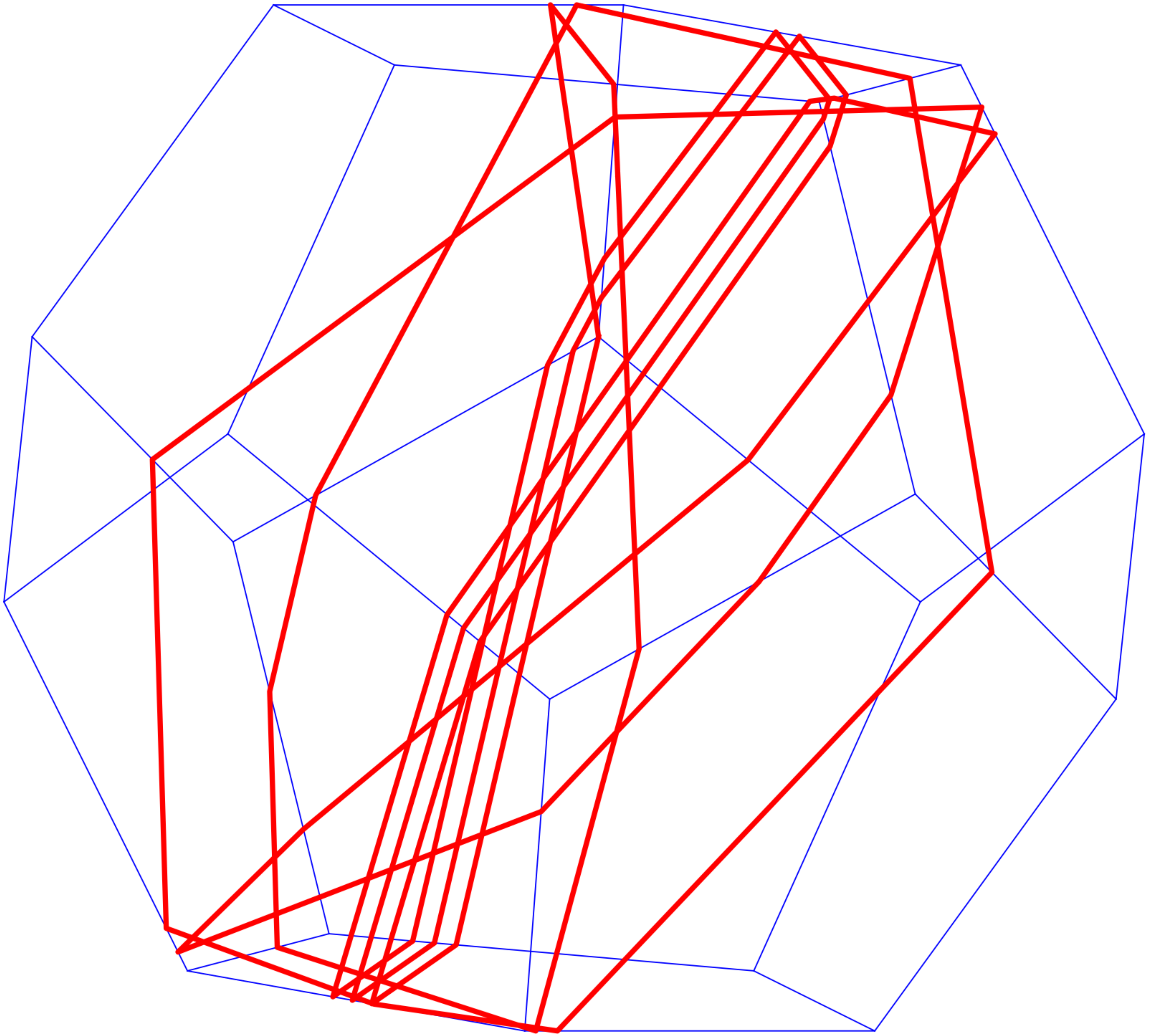


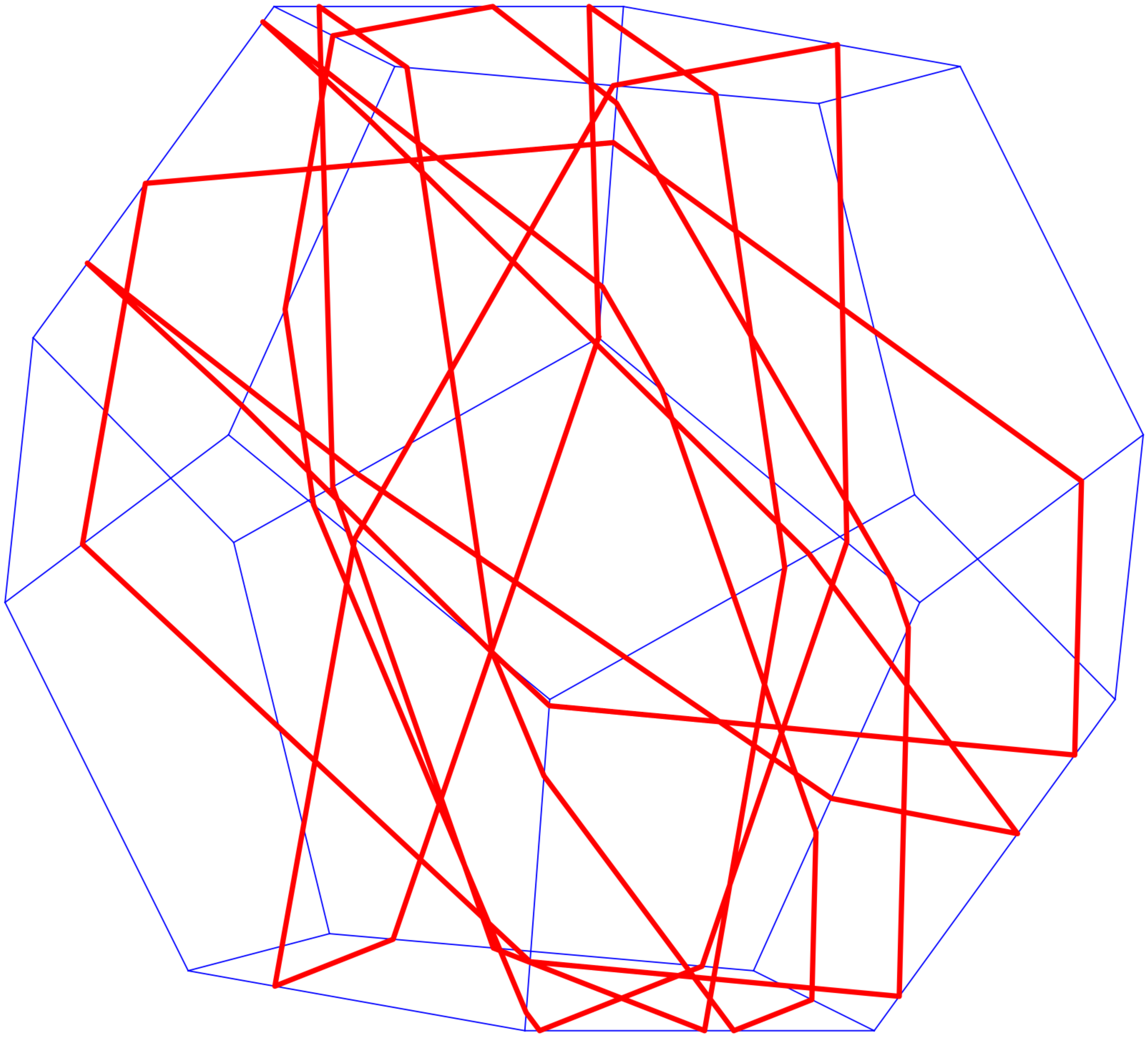


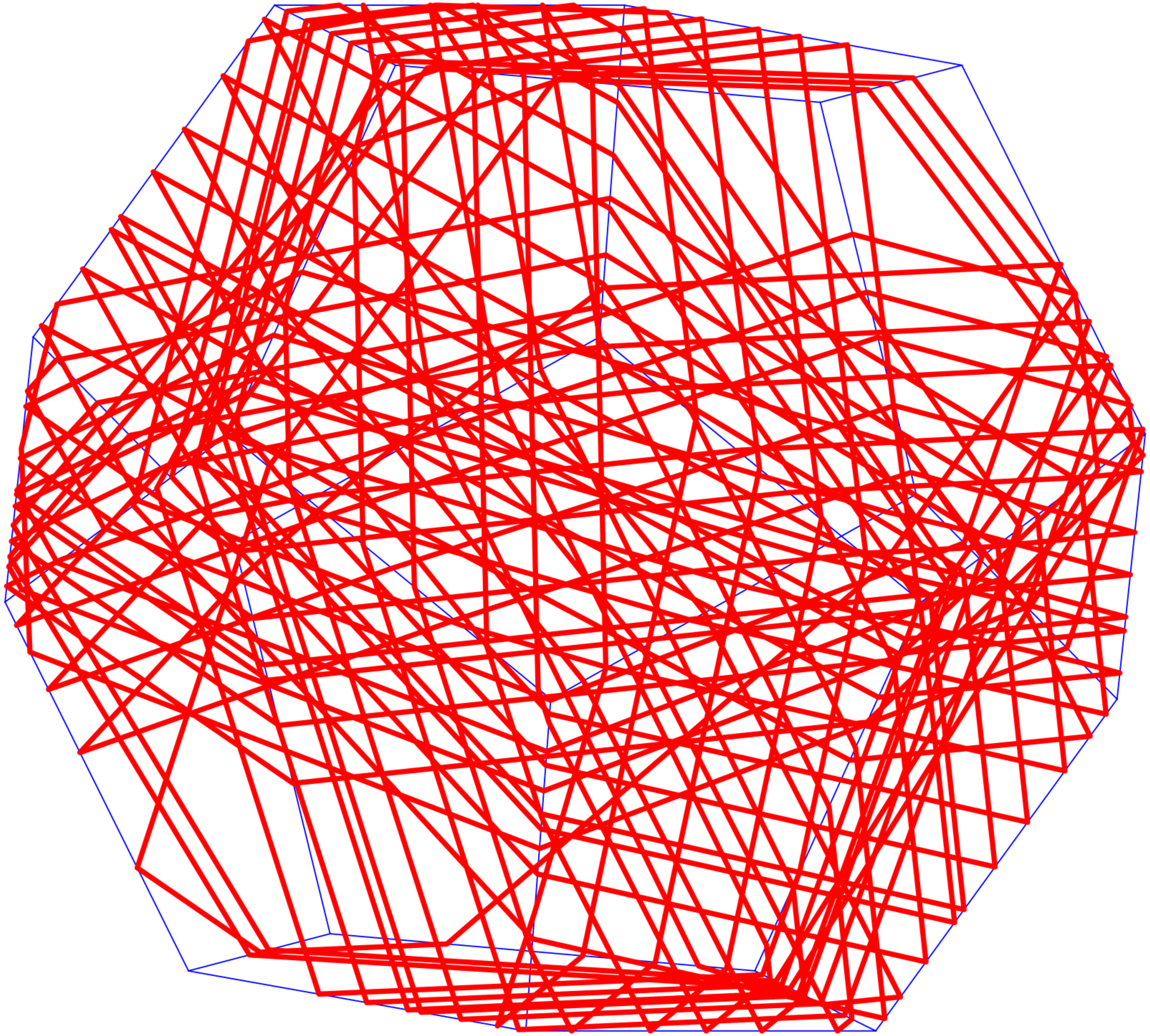




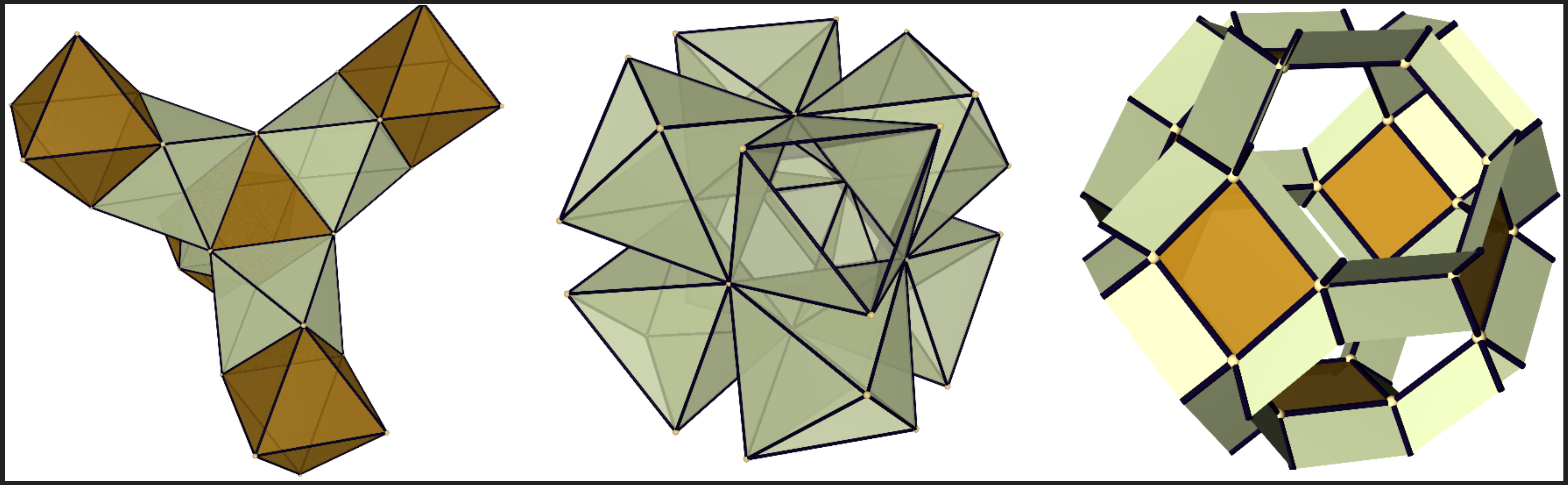


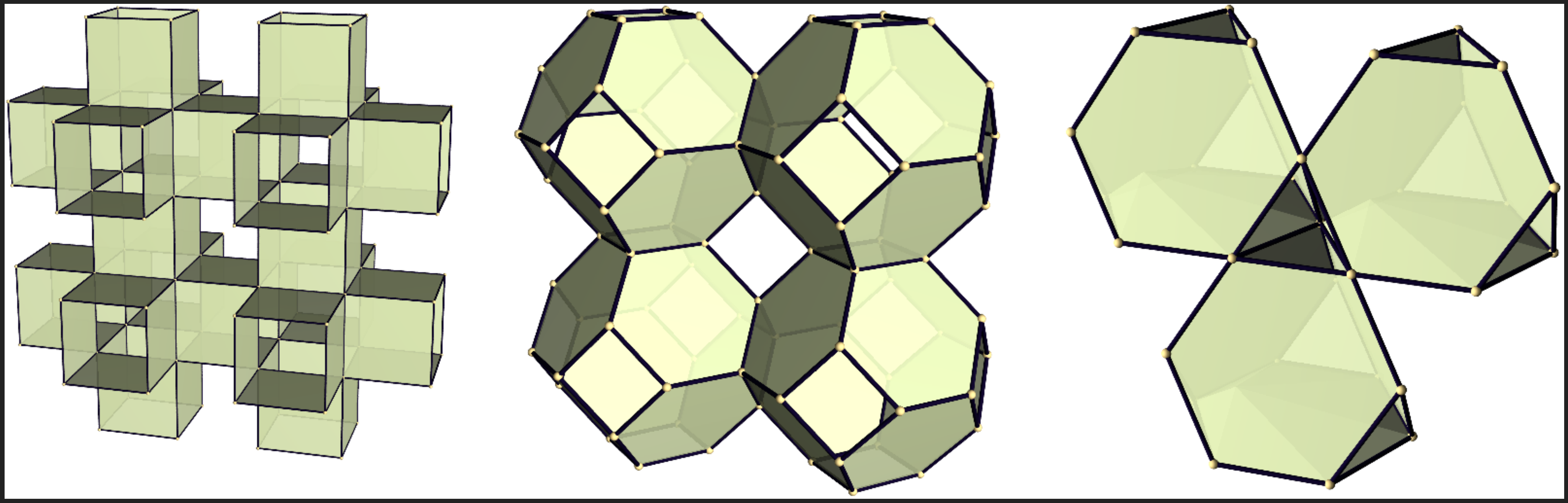






DODECAHEDRON





NARRATIVES

- Mathematics is about telling stories
- Geometry gives visual, tactile, and artistic learners an entry point to mathematics
- Geometry is a living, breathing, growing subject
- Computation plays a big role in geometry and visualization
- You can use Callysto to develop interesting Geometry modules